普通高等教育“十三五”规划教材

高等数学

（上册）

同步辅导分册

主　编　汪永娟
副主编　付吉丽　高剑

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京 • BEIJING

内 容 简 介

本书共分 6 章，每章又分若干节，各节主要内容由 5 部分组成：一、基本要求；二、考点知识概述；三、常用解题技巧；四、典型题解；五、测试题。

本书以“够用、管用、会用”为指导思想，将数学训练和实际问题相结合。每章都配有不同难度的测试题，对本章的学习情况进行检验。测试题是从各类考试题中精选出的大量有代表性的题目，可以满足不同基础、不同要求的学生使用。

本书可作为应用型本科院校及高职高专理工、经管类各专业学生的高等数学课程参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学（上册）同步辅导分册 / 汪永娟主编. —北京：电子工业出版社，2017.8

ISBN 978-7-121-32069-9

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①汪… Ⅲ. ①高等数学－高等学校－教学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 154031 号

策划编辑：朱干支
责任编辑：李　蕊
印　　刷：
装　　订：
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编：100036
开　　本：787×1 092　1/16　印张：6.75　字数：172.8 千字
版　　次：2017 年 8 月第 1 版
印　　次：2017 年 8 月第 1 次印刷
定　　价：22.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888，88258888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

本书咨询联系方式：（010）88254573，zgz@phei.com.cn。

前　言

高等数学是理工科各专业的重要基础课，它既为后续课程准备必要的数学知识与方法，又对学生科学思维的训练起着重要的作用。

本书是为学习《高等数学》而编写的辅导用书，充分考虑了应用型本科院校以培养具有实践能力和创新能力的应用型人才为宗旨，力求贯彻“够用、管用、会用”的“三用原则”，旨在帮助、指导广大读者理解基本概念，掌握基本知识，学会基本解题方法与技巧，提高应试能力和数学思维水平。在内容的取舍方面，在巩固基础、强化理解基本概念的前提下，将一些典型应用型例题及解题方法与技巧融入书中，突出应用型本科院校学生培养特色。本书体现了数学教学循序渐进、由浅入深的特点，同时，体现了近几年考研命题的新动向。本书将会成为读者学习《高等数学》的良师益友。

为了方便使用，本书配有习题答案（电子版），请有此需要的读者登录华信教育资源网（www.hxedu.com.cn）免费注册后下载。

本书由汪永娟担任主编，由付吉丽、高剑担任副主编，由曾昭英教授担任主审。编写分工如下：付吉丽编写第1章和第2章；汪永娟编写第3章和第4章；高剑编写第5章和第6章。本书得到了哈尔滨石油学院领导的大力支持，得到了张春志教授的悉心指导，并得到教研室同事张瑶、金宝胜、段宏博、武斌、王晓春老师在收集材料和校稿方面的大力帮助，在此一并表示衷心的感谢。

本书是与教学同步的学习辅导书，也是阶段复习的指导书。我们真诚地希望编出一本能够帮助读者学好《高等数学》的辅导书，但由于编者的水平有限，书中难免存在诸多错误与不足，敬请读者不吝指正，编者在此不胜感激。

编　者

2017年5月

目　　录

第 1 章　函数与极限

1.1　函　　数

一、基本要求

（1）理解邻域的概念，函数的基本概念.
（2）掌握函数的表示方法，基本初等函数，初等函数，分段函数.

二、考点知识概述

1．邻域

$|x-x_0|<\delta$，即开区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$称为点x_0的δ邻域，记作$U(x_0,\delta)$或$U(x_0)$.

把x_0去掉，即$0<|x-x_0|<\delta$，称为去心邻域，记作$\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$或$\overset{\circ}{U}(x_0)$.

2．函数

设有两个变量x与y，变量x的变化范围为实数集合D，如果存在一个确定的法则（或对应规则）f，使得对于每个$x\in D$都有唯一的一个实数y与之对应，则称y是x的函数，记作$y=f(x)$，x称为自变量，y称为因变量，f表示x与y之间的对应规则.

3．函数的表示方法

（1）解析法：显函数，隐函数，参数方程，复合函数，反函数.
（2）表格法.
（3）图像法.

4．常用函数

（1）基本初等函数：
① 常数函数$y=c$（c常数）.
② 幂函数$y=x^{\mu}$（μ为常数）.
③ 指数函数$y=a^x$（$a>0$且$a\neq1$）.
④ 对数函数$y=\log_a x$（$a>0$且$a\neq1$）.
⑤ 三角函数$y=\sin x$、$y=\cos x$、$y=\tan x$、$y=\cot x$、$y=\sec x$、$y=\csc x$.
注：自变量x一律采用弧度.
⑥ 反三角函数$y=\arcsin x$、$y=\arccos x$、$y=\arctan x$、$y=\operatorname{arccot} x$.
（2）初等函数：由基本初等函数经过有限次的四则运算或有限次的复合，并用一个式子表

示的函数称为初等函数。

（3）分段函数.

如 $f(x)=\begin{cases}1, x\text{为有理数}\\0, x\text{为无理数}\end{cases}$.

三、常用解题技巧

求函数的定义域：

（1）若函数式含有分式，则分母不为 0.

（2）若函数式含有开偶次方根式，则被开方数非负.

（3）若函数式含有对数，则真数大于 0，底大于 0 且不等于 1.

（4）若函数式含有反正弦或反余弦，则反正弦或反余弦符号下式子的绝对值要不大于 1.

（5）若函数式含有正切符号，则正切符号下的式子的值不能为 $K\pi+\dfrac{\pi}{2}$；若函数式含有余切符号，则余切符号下的式子的值不为 $K\pi$（K 为整数）.

（6）函数具有实际意义时，除了考虑上述要求外，还要根据实际意义来确认其定义域，如正方形边长为 x，面积为 y，则 $y=x^2, x\in(0,+\infty)$.

四、典型题解

【例 1】下列各题中，函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否相同？

（1）$f(x)=(\sqrt{x})^2,\quad g(x)=\sqrt{x^2}$.

（2）$f(x)=1,\quad g(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$.

解　（1）不相同，因为定义域不同，$D_f=[0,+\infty),\quad D_g=(-\infty,+\infty)$.

（2）相同，因为定义域都是 $\mathbf{R}$，且对应法则也相同.

【例 2】确定下列函数的定义域.

（1）$y=\sqrt{4-x^2}+\lg(x-1)$；　　（2）$y=\lg(1-2\cos x)$.

解　（1）由 $\begin{cases}4-x^2\geqslant 0\\x-1>0\end{cases}$，有 $\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 2\\x>1\end{cases}$，所以定义域为 $\{x\,|\,1<x\leqslant 2\}$.

（2）由 $1-2\cos x>0$，知 $x\in\left(2k\pi+\dfrac{\pi}{3},2k\pi+\dfrac{5\pi}{3}\right)$，$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$，从而函数的定义域为 $\left\{x\,|\,x\in(2k\pi+\dfrac{\pi}{3},2k\pi+\dfrac{5\pi}{3}),k=0,\pm1,\pm2,\cdots\right\}$.

【例 3】若 $f(x-\dfrac{1}{x})=x^2+\dfrac{1}{x^2}$，求 $f(x)$.

解　由 $f(x-\dfrac{1}{x})=x^2+\dfrac{1}{x^2}=(x-\dfrac{1}{x})^2+2$，可知 $f(x)=x^2+2$.

【例 4】 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$，求 $f(x-1)$ 及 $f\left[f(x)\right]$.

解　$f(x-1)=\dfrac{1}{1+(x-1)}=\dfrac{1}{x}$

$$f\left[f(x)\right]=\frac{1}{1+f(x)}=\frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}=\frac{x+1}{x+2}$$

【例 5】设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0\\ 1+x, & x\geqslant 0\end{cases}$，求 $f\left[f(x)\right]$.

解　当 $x<0$ 时，$f(x)=x^2\geqslant 0$，故 $f\left[f(x)\right]=1+x^2$.

当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=1+x\geqslant 1>0$，故 $f\left[f(x)\right]=1+(1+x)=2+x$.

所以 $f(x)=\begin{cases}1+x^2, & x<0\\ 2+x, & x\geqslant 0\end{cases}$.

【例 6】设 $z=x+y+f(x-y)$，且当 $y=0$ 时，$z=x^2$，求 z 的表达式.

解　$y=0$，$z=x^2$，将 $y=0$ 代入 $z=x+y+f(x-y)$，得 $z=x+f(x)$，即可得 $f(x)=x^2-x$，$f(x-y)=(x-y)^2-(x-y)$，所以 $z=x+y+f(x-y)=x+y+(x-y)^2-(x-y)=(x-y)^2+2y$.

1.2　函数的性质

一、基本要求

掌握函数的四个基本性质：有界性、单调性、周期性、奇偶性.

二、考点知识概述

（1）有界性：如果存在一个正常数 M，对任何 $x\in D$，都有 $\left|f(x)\right|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 D 上有界；否则称 $f(x)$ 在 D 上无界.

（2）单调性：$y=f(x)$ 在 D 上有定义，任取两点 $x_1,x_2\in D$，且 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 D 上是单调增加的；当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 D 上是单调减少的.

（3）周期性：$y=f(x)$ 在 D 上有定义，如果存在一个非零常数 T 及任意 $x\in D$，且 $x+T\in D$，总有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是周期函数，如果存在最小正数 T，则称 T 为周期函数的最小正周期.

（4）奇偶性：设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果对于任意 $x\in D$，总有 $f(-x)=f(x)$ 成立，则称 $f(x)$ 为偶函数；如果对于任意 $x\in D$，总有 $f(-x)=-f(x)$ 成立，则称 $f(x)$ 为奇函数；否则称 $f(x)$ 为非奇非偶函数.

三、常用解题技巧

1．单调性

（1）两个增函数之和是增函数（两个减函数之和是减函数）.

（2）两个正增函数之积为增函数（两个正减函数之积为减函数）.

（3）$f\left[g(x)\right]$ 的增减性：同增异减，即 $f(x)$ 增，$g(x)$ 减，则 $f\left[g(x)\right]$ 为减函数.

2．奇偶性

（1）若 $f(x)+f(-x)=0$，则 $f(x)$ 为奇函数；若 $f(x)-f(-x)=0$，则 $f(x)$ 为偶函数；

若 $\dfrac{f(-x)}{f(x)}=-1$，则 $f(x)$ 为奇函数；若 $\dfrac{f(-x)}{f(x)}=1$，则 $f(x)$ 为偶函数.

（2）若 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有定义，则 $h(x)=f(x)-f(-x)$ 一定是奇函数，$g(x)=f(x)+f(-x)$ 一定是偶函数.

（3）奇函数+奇函数=奇函数；偶函数+偶函数=偶函数；奇函数+偶函数=非奇非偶
奇函数×奇函数=偶函数；偶函数×偶函数=偶函数；奇函数×偶函数=奇函数

（4）$f(x)$ 是偶函数，$g(x)$ 是奇函数，则 $f\left[g(x)\right]$ 是偶函数，$g\left[g(x)\right]$ 为奇函数.

1.3　数列的极限

一、基本要求

（1）理解数列极限的概念.
（2）掌握数列极限的性质和运算.

二、考点知识概述

1．数列极限

定义： 数列 $\{a_n\}$，当 n 无限增大时，如果其通项 a_n 与一个常数 a 无限接近，即 $|a_n-a|$ 趋于 0，则称数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a，或称数列 $\{a_n\}$ 以 a 为极限，记作 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 或者 $a_n\to a$（$n\to\infty$）；否则称 $\{a_n\}$ 发散或没有极限.

2．运算性质

设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，$c$ 常数，则：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}(ca_n)=c\lim\limits_{n\to\infty}a_n=ca$；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}b_n=a\pm b$；

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}(a_nb_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}b_n=ab$；

（4）$b\neq 0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}=\dfrac{a}{b}$.

3．重要公式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0n^k+a_1n^{k-1}+\cdots+a_k}{b_0n^m+b_1n^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & k=m\\ 0, & k<m\\ \infty, & k>m\end{cases}\quad (a_0b_0\neq 0)$$

4．收敛数列性质

定理 1.3.1　（极限的唯一性）如果数列 $\{a_n\}$ 收敛，那么它的极限是唯一的.

定理 1.3.2　收敛数列一定有界（反之未必）.

定理 1.3.3　（收敛数列的保号性）如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，且 $a>0$（或 $a<0$），那么存在正整数 $N>0$，当 $n>N$ 时，都有 $a_n>0$（或 $a_n<0$）.

定理 1.3.4　$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 的充要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = a$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n-1} = a$.

定理 1.3.5　$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 的充要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+k} = a$ （$k\in\mathbf{N}$）.

三、常用解题技巧

（1）公式法：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_0n^k+a_1n^{k-1}+\cdots+a_k}{b_0n^m+b_1n^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & k=m\\ 0, & k<m\\ \infty, & k>m\end{cases}$ （$a_0b_0\neq 0$）

【例 1】已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+2}{2n+1}+an+b\right)=3$，求 a、b 的值.

解　原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+2+2an^2+(a+2b)n+b}{2n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2a+1)n^2+(a+2b)n+b+2}{2n+1}=3$

由公式可知：

$$\begin{cases}2a+1=0\\ \dfrac{a+2b}{2}=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{1}{2}\\ b=\dfrac{13}{4}\end{cases}$$

（2）对于分式类型求极限可以找到分子、分母中变化最快的项（当 $n\to\infty$ 时），让分子、分母同时除以这个最快的项。

【例 2】求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{2n+1}+4^n}{9^n-2^n}$.

解　原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3\cdot 9^n+4^n}{9^n-2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+\left(\dfrac{4}{9}\right)^n}{1-\left(\dfrac{2}{9}\right)^n}=3$

【例 3】求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+\cos n}{n+5}$.

解　原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{\cos n}{n}}{1+\dfrac{5}{n}}=1$

【例 4】若 $a>0$、$b>0$，计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n-b^n}{a^n+b^n}$.

解　当 $a>b$ 时，原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\left(\dfrac{b}{a}\right)^n}{1+\left(\dfrac{b}{a}\right)^n}=1$.

当 $a=b$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n-b^n}{a^n+b^n}=0$.

当 $a<b$ 时，原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\dfrac{a}{b}\right)^n-1}{\left(\dfrac{a}{b}\right)^n+1}=-1$.

【例 5】求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+n+3^n\cdot n}{4n-1-3(2n+1)3^{n-1}}$.

解　分子、分母中变化最快的是 $3^n\cdot n$，所以

$$原式=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2^n+n}{3^n\cdot n}+1}{\dfrac{4n-1}{3^n\cdot n}-\dfrac{3(2n+1)3^{n-1}}{3^n\cdot n}}=-\frac{1}{2}$$

（3）含参数问题，应对参数进行分类讨论.

【例 6】计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cos^n\theta-\sin^n\theta}{\cos^n\theta+\sin^n\theta}$，$\theta\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

解　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cos^n\theta-\sin^n\theta}{\cos^n\theta+\sin^n\theta}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\tan^n\theta}{1+\tan^n\theta}=\begin{cases}1, & 0<\theta<\dfrac{\pi}{4}\\ 0, & \theta=\dfrac{\pi}{4}\\ -1, & \dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$

四、典型题解

【例 7】观察下列数列的变化趋势，判别哪些数列有极限，如果有极限，指出它们的极限.

（1）$x_n=1+(-1)^n\dfrac{2}{n}$；　　（2）$x_n=(-1)^n$；

（3）$x_n=2^{(-1)^n}$；　　（4）$x_n=(-1)^n\sin\dfrac{1}{n}$；

（5）$x_n=\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$.

解　（1）$(-1)^n\dfrac{2}{n}$ 随着 n 的增大，$\left|(-1)^n\dfrac{2}{n}\right|=\dfrac{2}{n}$ 无限趋于 0，因此

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\left[1+(-1)^n\frac{2}{n}\right]=1$$

（2）$x_n=(-1)^n$，1 和−1 交替出现，所以该数列的极限不存在.

（3）$x_{2k}=2,\quad x_{2k-1}=\dfrac{1}{2}$，所以数列 $x_n=2^{(-1)^n}$ 的极限不存在.

（4）当 n 趋于无穷大时，$\dfrac{1}{n}$ 无限趋于 0，$\sin\dfrac{1}{n}$ 也无限趋于 0，因此

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\left[(-1)^n\sin\frac{1}{n}\right]=0$$

（5）$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)n}{2}}{n^2}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2}$

【例 8】$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left[2-\left(\frac{r}{r+1}\right)^n\right]=2$，求 r 的取值范围.

解　由已知可得 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{r}{r+1}\right)^n=0$，即 $\left|\dfrac{r}{r+1}\right|<1$，解得 $r>-\dfrac{1}{2}$.

1.4　函数的极限

一、基本要求

（1）理解函数极限的概念.
（2）掌握函数极限的性质.

二、考点知识概述

1．函数极限

（1）**定义**：函数 $y=f(x)$ 在 $\overset{\circ}{U}(a,\delta)$ 有定义，如果当 $x\to a$ 时，$f(x)$ 无限趋于一个常数 A，即 $|f(x)-A|$ 趋于 0，则称 $x\to a$ 时，$f(x)$ 收敛于 A，或称 A 是 $f(x)$ 在 $x\to a$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$，或 $f(x)\to A$（$x\to a$）；否则称 $f(x)$ 在 $x\to a$ 时发散，或 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 不存在.

（2）极限符号：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$；$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)\overset{\Delta}{=}f(x_0^+)$ 右极限；$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\overset{\Delta}{=}f(x_0^-)$ 左极限.

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$；$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$；$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

2．充要条件

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在的充要条件是 $f(x_0^-)=f(x_0^+)$.

3．函数极限的性质

定理 1.4.1　（极限的唯一性）如果 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$，则极限唯一.

定理 1.4.2　（局部有界性）如果 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$ 存在点 a 的某个空心邻域 $\overset{\circ}{U}(a,\delta)$，则 $f(x)$ 在 $\overset{\circ}{U}(a,\delta)$ 一定有界.

定理 1.4.3　（局部保号性）如果 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$ 且 $A>0$（或 $A<0$），那么存在常数 $\delta>0$，

使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时，有 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）.

定理 1.4.4　如果 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=A$（$A$ 可以是无穷大）且 $g(x)\neq A$，$\lim\limits_{x\to a}f(x)=B$，则 $\lim\limits_{x\to a}f\left[g(x)\right]=B$.

4．函数极限的运算法则

如果 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to a}g(x)=B$，$c$ 常数，则：

（1）$\lim\limits_{x\to a}\left[cf(x)\right]=c\lim\limits_{x\to a}f(x)=cA$；

（2）$\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\pm g(x)\right]=\lim\limits_{x\to a}f(x)\pm\lim\limits_{x\to a}g(x)=A\pm B$；

（3）$\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)g(x)\right]=\lim\limits_{x\to a}f(x)\lim\limits_{x\to a}g(x)=AB$；

（4）$B\neq 0$，$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}=\dfrac{A}{B}$.

三、常用解题技巧

（1）分解因式，通分，有理化.

（2）公式法：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^k+a_1x^{k-1}+\cdots+a_k}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}0, & k<m\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & k=m\\ \infty, & k>m\end{cases}$（$a_0b_0\neq 0$）.

（3）分段函数分段点（或间断点）的极限采用左右极限的方法：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在的充要条件是 $f(x_0^-)=f(x_0^+)$.

四、典型题解

【例 1】设函数

$$f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0\\ 2, & x=0\\ (x-1)^2, & 0<x<2\\ 0, & x=2\\ x-3, & x>2\end{cases}$$

求下列极限，如果极限不存在，则说明理由.

（1）$\lim\limits_{x\to -1}f(x)$；　　（2）$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$；

（3）$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$；　　（4）$\lim\limits_{x\to 2}f(x)$.

解　（1）$\lim\limits_{x\to -1}f(x)=\lim\limits_{x\to -1}(x+1)=0$

（2）$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x-1)^2=1$，$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x+1)=1$. 因为 $f(0^-)=f(0^+)$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$.

（3）$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2=0$

（4）$\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x-1)^2=1$，$\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x-3)=-1$

因为 $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$，所以 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ 不存在.

【例 2】计算下列极限.

（1）$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5}{x-3}$；　（2）$\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\dfrac{x^2-2}{x^2+3}$；

（3）$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+2h)^2-x^2}{h}$；　（4）$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-1}$；

（5）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-\dfrac{1}{5x}+\dfrac{8}{x^2}\right)$；　（6）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$；

（7）$\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{3}{1+x^3}\right)$.

解　（1）因为分母的极限不为 0，所以

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+5}{x-3}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^2+5)}{\lim\limits_{x\to 2}(x-3)}=\frac{9}{-1}=-9$$

（2）因为分母的极限不为 0，所以

$$\lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{x^2-2}{x^2+3}=\frac{\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}(x^2-2)}{\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}(x^2+3)}=\frac{0}{5}=0$$

（3）$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+2h)^2-x^2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{4hx+4h^2}{h}=4x$

（4）分子、分母的极限均为 0，不能直接利用商的运算法则求解，必须将分子、分母因式分解，分解出 $(x+1)$ 因子，再把它消去：

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+2x+1}{x^2-1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)^2}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{x-1}=\frac{0}{-2}=0$$

（5）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-\dfrac{1}{5x}+\dfrac{8}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}3-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{5x}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8}{x^2}=3$

（6）因为分子、分母的极限均为 0，所以分子、分母要因式分解消去分子、分母为 0 的公因子，即

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(5x^2-2x+1)x}{(3x+2)x}=\lim_{x\to 0}\frac{5x^2-2x+1}{3x+2}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}(5x^2-2x+1)}{\lim\limits_{x\to 0}(3x+2)}=\frac{1}{2}$$

（7）$\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{3}{1+x^3}\right)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{1+x^3}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x-2)(x+1)}{1+x^3}$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{x-2}{x^2-x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to -1}(x-2)}{\lim\limits_{x\to -1}(x^2-x+1)}=-1$$

【例 3】求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}$.

解　$x=0$ 是间断点，因此需要讨论在 $x=0$ 处的左右极限.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}=-1,\quad (\lim_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=+\infty)$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}=\infty,\ (\lim_{x\to 0^-}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=0)$$

【例 4】求 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})$，$|x|<1$.

解　$$\lim_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1-x)}(1-x)(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1-x)}(1-x^2)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1-x)}(1-x^4)\cdots(1+x^{2^n})$$

$$=\cdots=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1-x)}(1-x^{2^{n+1}})=\frac{1}{1-x},\ |x|<1$$

【例 5】求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^{nx}}$.

解　（1）当 $x=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^{nx}}=\dfrac{1-1}{1+1}=0$.

（2）当 $x>0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^{-nx}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\dfrac{1}{\mathrm{e}^{nx}}}{1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^{nx}}}=1$.

（3）当 $x<0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^{-nx}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{nx}-1}{\mathrm{e}^{nx}+1}=-1$.

【例 6】 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}, & x<0\\ 1, & x=0\\ 1+x\sin\dfrac{1}{x}, & x>0\end{cases}$，计算 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

解　因为 0 为函数的分段点，故需要求 0 点的左右极限.

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(1+x\sin\frac{1}{x})=1$$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=0$$

因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$，故 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在.

1.5　无穷大与无穷小

一、基本要求

（1）理解无穷大与无穷小的概念.

（2）掌握无穷小的性质.
（3）掌握无穷小的阶的比较.
（4）理解无穷大的性质.

二、考点知识概述

1．无穷小

（1）**定义**：如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$，则称 $f(x)$ 为在 $x\to x_0$ 时的无穷小，特别地，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$，称 a_n 为在 $n\to\infty$ 时的无穷小.

（2）无穷小与极限的关系：
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的充要条件是 $f(x)=A+\alpha(x)$，其中 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

（3）无穷小的性质：
① 两个无穷小的代数和仍是无穷小.
② 有限个无穷小的代数和仍是无穷小.
③ 常数与无穷小的积仍是无穷小.
④ 两个无穷小的积仍是无穷小.
⑤ 有限个无穷小的积仍是无穷小.
⑥ 有界变量与无穷小的积仍是无穷小.

常用的有界变量：$(-1)^n$、$\sin(x)$、$\cos(x)$、$\arcsin(x)$、$\arccos(x)$、$\arctan(x)$、$\operatorname{arc}\cot(x)$，以及由三角函数、反三角函数复合得到的函数。

（4）无穷小的阶的比较：

$$\lim_{x\to x_0}\alpha=0,\quad \lim_{x\to x_0}\beta=0$$

① 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=0$，则称 α 是 β 的高阶无穷小，记作 $\alpha=o(\beta)$；

② 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=C\neq 0$，则称 α 是 β 的同阶无穷小；

③ 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta^k}=C\neq 0$，$k>0$，则称 α 是 β 的 k 阶无穷小；

④ 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=1$，则称 α 与 β 是等价无穷小，记作 $\alpha\sim\beta$；

⑤ 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=\infty$，则称 α 是 β 的低阶无穷小.

（5）无穷小的等价替换定理：
设 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta'}{\alpha'}$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha'}{\beta'}$.

2．无穷大

（1）**定义**：无穷小 α（$\neq 0$）的倒数，称为无穷大.
（2）无穷大的性质：
① 两个同号的无穷大的和仍是无穷大；

② 有限个同号的无穷大的和仍是无穷大；
③ 非零常数乘以无穷大仍是无穷大；
④ 两个无穷大的积仍是无穷大；
⑤ 有限个无穷大的积仍是无穷大.

三、常用解题技巧

（1）利用无穷小与极限的关系.

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的充要条件是 $f(x)=A+\alpha(x)$，其中 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

注： 利用无穷小可以将极限符号去掉，从而得到函数 $f(x)$ 的表达式。

【例 1】 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)}{x}=3$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(3x)}$.

解 由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)}{x}=3$，得 $\dfrac{f(2x)}{x}=3+\alpha(x)\Rightarrow f(2x)=3x+x\alpha(x)\Rightarrow f(3x)=\dfrac{9}{2}x+\dfrac{3}{2}x\alpha\left(\dfrac{3}{2}x\right)$.

其中 $\lim\limits_{x\to 0}\alpha(x)=0$，即有 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(3x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\dfrac{9}{2}x+\dfrac{3}{2}x\alpha\left(\dfrac{3}{2}x\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\dfrac{9}{2}+\dfrac{3}{2}\alpha\left(\dfrac{3}{2}x\right)}=\dfrac{2}{9}$.

（2）利用无穷小的性质.

要特别注意有界变量与无穷小的积仍是无穷小.

【例 2】 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin(x)}{x}$.

解 $\dfrac{1}{x}\to 0$（$x\to\infty$），$\sin(x)$ 为有界变量，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin(x)}{x}=0$.

（3）利用无穷小阶的定义.

（4）利用等价替换定理.

设 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta'}{\alpha'}$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha'}{\beta'}$.

四、典型题解

【例 3】 当 $x\to 0$ 时，$2x-x^2$ 与 x^2-x^3 相比，哪一个是高阶无穷小？

解 因 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-x^3}{2x-x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x^2}{2-x}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}(x-x^2)}{\lim\limits_{x\to 0}(2-x)}=0$，所以当 $x\to 0$ 时，$2x-x^2$ 是 x^2-x^3 高阶的无穷小，记为 $x^2-x^3=o(2x-x^2)$.

【例 4】 利用无穷小的性质，计算下列极限.

（1）$\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}$；　　（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x^2}$.

解 （1）因为当 $x\to 0$ 时，$\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$，故 $\sin\dfrac{1}{x}$ 是有界函数，又 $\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$，即当 $x\to 0$ 时，x^2 是无穷小，则由无穷小的性质知 $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}=0$.

（2）当 $x\to\infty$ 时，$|\arctan x|<\dfrac{\pi}{2}$，即 $\arctan x$ 是有界函数，又 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$，即当 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{x^2}$ 是无穷小，则由无穷小的性质得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\arctan x}{x^2}=0$$

1.6　两个重要极限

一、基本要求

（1）掌握判别极限存在的两个定理.

（2）掌握 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 和 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 这两个重要极限.

二、考点知识概述

1．两边夹定理

当 $x\in\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$（或 $|x|>M$）时，$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$，那么 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

特别是数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$、$\{c_n\}$ 满足从某项开始，当 $n>n_0$ 时，有 $a_n\leqslant b_n\leqslant c_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}c_n=A$，那么 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=A$.

2．由两边夹定理得出的重要极限

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，它的本质是 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin\Delta}{\Delta}=1$，其中 $\lim\limits_{x\to x_0}\Delta=0$.

3．单调有界数列一定有极限

4．由单调有界定理得出的另一个重要极限

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$，它的本质是 $\lim\limits_{x\to x_0}(1+\Delta)^{\frac{1}{\Delta}}=\mathrm{e}$，其中 $\lim\limits_{x\to x_0}\Delta=0$.

三、常用解题技巧

（1）两个判别极限存在的定理：两边夹和单调有界定理.

【例 1】 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+2^n+3^n\right)^{\frac{1}{n}}$.

解　$3^n<1+2^n+3^n<3\times3^n\Rightarrow3<(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}<3\times3^{\frac{1}{n}}$

$\lim\limits_{n\to\infty}3^{\frac{1}{n}}=1$，由两边夹定理可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+2^n+3^n\right)^{\frac{1}{n}}=3$（3 为 3 个底中最大的一个）.

【例 2】 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

解　$\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}<\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}<$
$\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}=\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}=1$，由两边夹定理可知$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$.

【例 3】$x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{3}{x_n}\right)$，$n=1,2,\cdots$，$x_1=1$，证明数列$\{x_n\}$收敛，并计算$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

证　由$x_1=1$，$x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{3}{x_n}\right)$，$n=1,2,\cdots$，可知$x_n>0$.

$x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{3}{x_n}\right)\geqslant\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{x_n\times\dfrac{3}{x_n}}=\sqrt{3}$，可知$\{x_n\}$有下界$\sqrt{3}$.

$\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{3}{x_n^2}\right)\leqslant\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{3}{3}\right)=1$，可知$\{x_n\}$单调递减.

由单调递减有下界知，数列必有极限，即数列$\{x_n\}$收敛.

对$x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{3}{x_n}\right)$两边求极限.

$$\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{3}{x_n}\right)\Rightarrow A=\frac{1}{2}\left(A+\frac{3}{A}\right)\Rightarrow A=\sqrt{3}，\ \lim_{n\to\infty}x_n=\sqrt{3}$$

（2）利用两个重要极限的本质：$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin\Delta}{\Delta}=1$，其中$\lim\limits_{x\to x_0}\Delta=0$；$\lim\limits_{x\to x_0}(1+\Delta)^{\frac{1}{\Delta}}=\mathrm{e}$，其中$\lim\limits_{x\to x_0}\Delta=0$.

【例 4】求$\lim\limits_{x\to1}(x)^{\frac{1}{1-x}}$.

解　$\lim\limits_{x\to1}(x)^{\frac{1}{1-x}}=\lim\limits_{x\to1}(1+x-1)^{\frac{1}{x-1}(x-1)\frac{1}{1-x}}=\mathrm{e}^{-1}$

【例 5】求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)^n$.

解　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\mathrm{e}$

（3）利用等价替换定理.

常用的等价无穷小：当$x\to0$时，则

① $x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim\ln(1+x)\sim\mathrm{e}^x-1$；

② $1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$；

③ $a^x-1\sim x\ln a$；

④ $(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$；

⑤ $(1+\beta x)^\alpha-1\sim\alpha\beta x$.

当 $x \to x_0$ 时，$\Delta \to 0$，a 为常数，则

$a\Delta \sim \sin(a\Delta) \sim \tan(a\Delta) \sim \arcsin(a\Delta) \sim \arctan(a\Delta) \sim \ln(1+a\Delta) \sim \mathrm{e}^{a\Delta}-1$，同理其他 4 个等价无穷小也用相应的变形.

注意：分子、分母都是乘积时，才可将一个因子用等价无穷小来代替；分子、分母是和差时，绝对不允许用等价无穷小来代替.

【例 6】 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{\tan x}-\mathrm{e}^{x}}{x^3}$.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\tan x}-\mathrm{e}^{x}}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x}(\mathrm{e}^{\tan x-x}-1)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\tan x-x}-1}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3}{x^3}=\frac{1}{3}$$

四、典型题解

【例 7】 计算下列极限.

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{x}$（$k$ 为非零常数）；　（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 4x}{x}$；

（3）$\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\cot x$；　（4）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$；

（5）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^2 x}$；　（6）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1-x}-1}{x}$.

解 （1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{kx}\cdot k=k$

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 4x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{4x}\cdot\dfrac{4}{\cos 4x}=4$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\cot x=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}\cdot\cos x=1$

（4）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2 x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x}{x}=2$

（5）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x(1-\cos x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\frac{x^2}{2}}{x^2}=0$

（6）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1-x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{3}x}{x}=-\dfrac{1}{3}$

【例 8】 计算下列极限.

（1）$\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$；　（2）$\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}$；

（3）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{3x}$；　（4）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$.

解 （1）$\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[1+(-2x)^{\frac{1}{-2x}}\right]^{-2}=\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$

（2）$\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+3x)^{\frac{1}{3x}}\right]^3=\mathrm{e}^3$

（3）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{3x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}\right]^3=\mathrm{e}^3$

（4）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{2}\cdot\frac{2}{2x+1}(x+1)}=\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{2(x+1)}{2x+1}}=\mathrm{e}$

1.7　函数的连续性

一、基本要求

（1）掌握连续的定义及其性质.

（2）掌握函数的间断点及分类.

二、考点知识概述

1．函数的连续性

（1）**定义**：设函数 $y=f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内有定义，如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续，或者称 x_0 是 $f(x)$ 的一个连续点；

如果 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在点 x_0 左连续；

如果 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在点 x_0 右连续；

显然 $f(x)$ 在 x_0 连续的充要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 既左连续，又右连续.

（2）连续函数的性质.

四则运算性质：

$f(x)$、$g(x)$ 在点 x_0 连续，c 为常数，则

① $cf(x)$ 在点 x_0 连续；

② $f(x)\pm g(x)$ 在点 x_0 连续；

③ $f(x)g(x)$ 在点 x_0 连续；

④ 当 $g(x_0)\neq 0$ 时，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 在点 x_0 连续.

复合函数连续性：

若 $y=f(u)$ 在点 u_0 连续，$u=g(x)$ 在点 x_0 连续，且 $u_0=g(x_0)$，则 $y=f\left[g(x)\right]$ 在点 x_0 连续.

2．常用的连续函数

基本初等函数在其定义域内都是连续的；初等函数在其定义区域内都是连续的；单调连续函数的反函数是单调连续函数.

3．函数的间断点

（1）**定义：** $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域内（x_0 可除外）有定义.

① $x=x_0$ 无定义；

② x_0 有定义时 $\begin{cases}\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \text{ 不存在} \\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \text{存在，但} \lim\limits_{x\to x_0} \neq f(x_0)\end{cases}$，这时称 x_0 为间断点.

（2）间断点的分类：

x_0 是 $y=f(x)$ 的间断点.

① 若 $f(x_0^-)$、$f(x_0^+)$ 存在，则称 x_0 是第一类间断点.

若 $f(x_0^-)=f(x_0^+)$，则称 x_0 是第一类可去间断点（或可补间断点）.

若 $f(x_0^-)\neq f(x_0^+)$，则称 x_0 是第一类跳跃间断点.

② 若 $f(x_0^-)$ 与 $f(x_0^+)$ 至少有一个不存在，则称 x_0 是第二类间断点.

三、常用解题技巧

（1）连续与极限的关系：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \Leftrightarrow$ 称函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

（2）利用函数连续定义及常用的连续函数求一个函数的连续区间.

（3）利用间断点的定义及分类求一个函数的间断点.

四、典型题解

【例 1】下列函数在指出的点处间断，说明这些间断点属于哪一类？如果是可去间断点，则补充定义或改变函数的定义使它连续.

（1）$y=x\cdot\sin\dfrac{1}{x},\quad x=0$；　　（2）$y=\sin^2\dfrac{1}{x},\quad x=0$；

（3）$y=\begin{cases}2x+1, & x<2 \\ 4-2x, & x\geqslant 2\end{cases}$，$x=2$.

解　（1）$x=0$ 是可去间断点，属于第一类间断点.

当 $x\to 0$ 时，$\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$，即 $\sin\dfrac{1}{x}$ 是有界函数，x 为无穷小量，从而 $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\sin\dfrac{1}{x}=0$，补充定义，当 $x=0$ 时，$y=0$．从而 $y=\begin{cases}x\cdot\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0\end{cases}$ 是连续函数.

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\sin^2\dfrac{1}{x}$ 不存在，所以 x=0 是第二类间断点.

（3）$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^-} y=\lim\limits_{x\to 2^-}(2x+1)=5 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} y=\lim\limits_{x\to 2^+}(4-2x)=0\end{cases}$，$\lim\limits_{x\to 2^-} y\neq\lim\limits_{x\to 2^+} y$，故 $x=2$ 是第一类间断点.

【例 2】求下列极限.

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{2x^3+8}$；（2）$\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{6}}(\sin 3\alpha)^3$.

解（1）$\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{2x^3+8}=\sqrt{\lim\limits_{x\to 0}(2x^3+8)}=2\sqrt{2}$.

（2）$\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{6}}(\sin 3\alpha)^3=\left[\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{6}}(\sin 3\alpha)\right]^3=1$.

【例 3】 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x}{2}, & x<0\\ a+x^2, & x\geqslant 0\end{cases}$，怎样选取数 a，使得 $f(x)$ 成为在 $(-\infty,+\infty)$ 内的连续函数.

解 当 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$ 时，$f(x)$ 是在 $(-\infty,+\infty)$ 内的连续函数.

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x}{2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^-}e^x=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(a+x^2)=a+\lim_{x\to 0^+}x^2=a$$

即当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 成为在 $(-\infty,+\infty)$ 内的连续函数.

【例 4】 证明方程 $x^6-2x-1=0$ 至少有一个根介于 1 与 2 之间.

证 函数 $f(x)=x^6-2x-1$ 在 $[1,2]$ 上连续，又

$$f(1)=-2<0,\quad f(2)=2^6-4-1=59>0$$

根据零点定理，在 $(1,2)$ 内至少有一点 ξ，使得 $f(\xi)=0$，即 $\xi^6-2\xi-1=0,\ 1<\xi<2$，这个等式说明方程 $x^6-2x-1=0$ 在区间 $(1,2)$ 内至少有一个根介于 1 与 2 之间.

【例 5】 证明方程 $\sin x+x+1=0$ 在开区间 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内至少有一个根.

证 函数 $f(x)=\sin x+x+1$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上连续，又

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}<0,\quad f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2+\frac{\pi}{2}>0$$

根据零点定理，在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内至少有一点 ξ，使得 $f(\xi)=0$，即 $\sin\xi+\xi+1=0,\ -\dfrac{\pi}{2}<\xi<\dfrac{\pi}{2}$，这个等式说明方程 $\sin x+x+1=0$ 在开区间 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内至少有一个根.

测　试　题

1．填空题

（1）已知 $f(x)=\ln x+1$、$g(x)=e^x$，则 $f[g(x)]=$ ______________.

（2）已知 $f(x)=\ln x+1$、$g(x)=\sqrt{x}+1$，则 $f[g(x)]=$ ______________.

（3）函数 $y=\sqrt{x-1}+\dfrac{\ln x}{x-3}$ 的定义域是 ____________________.

（4）若 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}+1$，则 $f(x)=$ ________.

（5）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n}\right)^n=$ ________.

（6）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n-1}\right)^n=$ ________.

（7）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-3}{n+2}\right)^n=$ ________.

（8）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^x=$ ________.

（9）$\lim\limits_{x\to0}(1+\sin x)^{\cot x}=$ ________.

（10）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x\cdot\ln(1+x)}{x^2}=$ ________.

（11）$\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})=$ ________.

（12）$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{x-1}=$ ________.

（13）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x-2}\right)^x=$ ________.

（14）$\lim\limits_{x\to0}\left(x\sin\dfrac{2}{x}+\dfrac{\sin3x}{x}\right)=$ ________.

（15）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\sin\dfrac{2}{x}+\dfrac{\sin3x}{x}\right)=$ ________.

（16）已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+5}{x-1}+ax+b\right)=3$，则 $a=$ ________，$b=$ ________.

（17）当 $x\to0$ 时，无穷小 $1-\cos x$ 与 mx^2 是等价无穷小，则 $m=$ ________.

（18）设 $f(x)=\dfrac{x^2}{1-\cos x}$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的第________类间断点，$x=2\pi$ 是 $f(x)$ 的第________类间断点.

（19）若使 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\tan2x+\ln(1+2ax)}{x}, & x\neq0\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，则 $a=$ ________.

（20）若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin bx}{x}, & x>0\\ a+bx^2, & x\leqslant0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则常数 a 与 b 满足的关系是________.

2．选择题

（1）设 $f(x)=\begin{cases}x-1, & x\leqslant0\\ 2^x, & x>0\end{cases}$，则 $f(x^2)=$（　　）.

A．x^2-1　　　　B．2^{x^2}

C. $\begin{cases} x^2-1, x\leqslant 0 \\ 2^{x^2}, \quad x>0 \end{cases}$　　D. $\begin{cases} x^2-1, x=0 \\ 2^{x^2}, \quad x\neq 0 \end{cases}$

（2）下列函数中为偶函数的是（　　）.

A. $y=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$　　B. $y=x\cos x$

C. $y=(x^2+1)\tan x$　　D. $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\sin x$

（3）已知 $f(x)=\ln x+1,\quad g(x)=\sqrt{x}+1$，则 $f[g(x)]=$（　　）.

A. $\ln\sqrt{x}+1$　　B. $\ln\sqrt{x}+2$

C. $\ln(\sqrt{x}+1)+1$　　D. $\sqrt{\ln(x+1)}+1$

（4）$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x+a}{3-x}=b$，则 a、b 为（　　）.

A. $a=-3$、$b=4$　　B. $a=-3$、$b=-4$　　C. $a=3$、$b=4$　　D. $a=3$、$b=-4$

（5）当 $n\to\infty$ 时，与 $\sin^2\dfrac{1}{n}$ 等价的无穷小是（　　）.

A. $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$　　B. $\dfrac{1}{n}$　　C. $\dfrac{1}{n^2}$　　D. $\dfrac{2}{n}$

（6）设 $f(x)=2^x+5^x-2$，则当 $x\to 0$ 时，有（　　）.

A. $f(x)$ 与 x 是等价无穷小　　B. $f(x)$ 与 x 同阶但非等价无穷小

C. $f(x)$ 是 x 的高阶无穷小　　D. $f(x)$ 是 x 的低阶无穷小

（7）设 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+2}{n}\right)^{kn}=e^{-3}$，则 $k=$（　　）.

A. $\dfrac{3}{2}$　　B. $\dfrac{2}{3}$　　C. $-\dfrac{3}{2}$　　D. $-\dfrac{2}{3}$

（8）$\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\sin\dfrac{1}{1-x}=$（　　）.

A. 1　　B. −1　　C. 0　　D. 不存在

（9）当 $x\to 0$ 时，$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$ 与 $\cos x-1$ 是等价的无穷小，则常数 $a=$（　　）.

A. $\dfrac{3}{2}$　　B. $\dfrac{2}{3}$　　C. $-\dfrac{3}{2}$　　D. $-\dfrac{2}{3}$

（10）设 $F(x)=\begin{cases} \dfrac{f(x)}{x}, & x\neq 0 \\ f(0), & x=0 \end{cases}$，其中 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导且 $f'(0)\neq 0$，$f(0)=0$，则 $x=0$ 是 $F(x)$ 的（　　）.

A. 连续点　　B. 第一类间断点

C. 第二类间断点　　D. 以上都不是

（11）假设当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)$、$g(x)$ 都是无穷大量，则当 $x\to+\infty$ 时，下列结论正确的是（　　）.

A．$f(x)+g(x)$是无穷大量　　B．$\dfrac{f(x)+g(x)}{f(x)g(x)}\to 0$

C．$\dfrac{f(x)}{g(x)}$　　D．$f(x)-g(x)\to 0$

（12）设函数 $f(x)=\dfrac{x}{a+e^{bx}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$，则常数 a 与 b 满足的关系是（　　）．

A．$a<0$、$b<0$　　B．$a>0$、$b>0$　　C．$a\leqslant 0$、$b>0$　　D．$a\geqslant 0$、$b<0$

（13）设数列 a_n 与 b_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=0$，则下列正确的是（　　）．

A．若 a_n 发散，则 b_n 发散　　B．若 a_n 无界，则 b_n 必有界

C．若 a_n 有界，则 b_n 必为无穷小　　D．若 $\dfrac{1}{a_n}$ 为无穷小，则 b_n 为无穷小

（14）设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$，则（　　）正确．

A．不存在间断点　　B．存在间断点 $x=1$

C．存在间断点 $x=0$　　D．存在间断点 $x=-1$

（15）$\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}}=$（　　）．

A．0　　B．$+\infty$　　C．1　　D．不存在

（16）当 $x\to 0$，变量 $\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$ 是（　　）．

A．无穷小　　B．无穷大

C．有界的，但不是无穷小　　D．无界的，但不是无穷大

（17）已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+5}{x-1}+ax+b\right)=3$，则（　　）．

A．$a=1$、$b=1$　　B．$a=-1$、$b=1$　　C．$a=1$、$b=-1$　　D．$a=-1$、$b=-1$

（18）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=$（　　）．

A．1　　B．0　　C．-1　　D．不存在

（19）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sin x}{x+1}=$（　　）．

A．1　　B．0　　C．-1　　D．不存在

（20）已知 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^{2002}}{n^k-(n-1)^k}=A$，则（　　）．

A．$A=2002$、$k=2002$　　B．$A=2003$、$k=2002$

C．$A=\dfrac{1}{2002}$、$k=2002$　　D．$A=\dfrac{1}{2003}$、$k=2003$

（21）$x_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & n\text{为奇数}\\ 1, & n\text{为偶数}\end{cases}$，则（　　）．

A．$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$　　B．$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$

C．$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} 0, & n\text{为奇数} \\ 1, & n\text{为偶数} \end{cases}$　　D．$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 不存在

（22）数列有界是数列收敛的（　　）．

A．充分条件　　B．必要条件

C．充分必要条件　　D．既非充分又非必要条件

（23）数列无界是数列收敛的（　　）．

A．充分条件　　B．必要条件

C．充分必要条件　　D．既非充分又非必要条件

（24）从 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=1$，不能推出（　　）．

A．$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=1$　　B．$f(x_0-0)=1$

C．$f(x_0)=1$　　D．$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-1]=0$

（25）$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$、$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 存在是 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在的（　　）．

A．充分条件　　B．必要条件

C．充分必要条件　　D．必要非充分条件

（26）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}=$（　　）．

A．0　　B．1　　C．-1　　D．不存在

（27）下面命题中正确的是（　　）．

A．无穷大是一个非常大的数　　B．有限个无穷大的和仍为无穷大

C．无界变量必为无穷大　　D．无穷大必是无界变量

（28）函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最大值和最小值是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续的（　　）．

A．充分条件　　B．必要条件

C．充分必要条件　　D．必要非充分条件

（29）$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ 是 $f(x)$ 在 x_0 连续的（　　）．

A．充分条件　　B．必要条件

C．充分必要条件　　D．必要非充分条件

（30）函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，则 $f(x)$ 必能取到最大值和最小值的区间为（　　）．

A．$[a,b)$　　B．(a,b)　　C．$[a,b]$　　D．$(-\infty,+\infty)$

3．计算题

（1）已知 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，求 $f\left[f(x)\right]$ 及 $f\left\{f\left[f(x)\right]\right\}$．

（2）求下列极限.

① $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x^2)}{\tan^2 x}$；　　② $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x}\right)^{x-1}$；

③ $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{4}{1-x^4}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)$；　　④ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\mathrm{e}^x}{\ln(1+x)}$；

⑤ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(100x^3+2x-5)}{\ln(2x^{10}+3x+1)}$；　　⑥ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5}{5x+3}\sin\dfrac{2}{x}$；

⑦ $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$；　　⑧ $\lim\limits_{n\to+\infty}[\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}]$；

⑨ $\lim\limits_{n\to+\infty} n\sin(4\pi\sqrt{n^2+1})$；　　⑩ $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\dfrac{\pi x}{2}$.

（3）求函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{|x|(x+1)}$ 的间断点，并判别其类型.

（4）如何修改 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\ln(1+x), & x>0\\ 0, & x=0\\ \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}, & x<0\end{cases}$ 的定义，使函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

（5）设 $f(x)$ 为奇函数，$g(x)$ 为偶函数，且 $f(x)+g(x)=e^x$，求 $f(x)$、$g(x)$ 的解析式.

（6）设 $2f(x)+x^2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x^2+2x}{x+1}$，求 $f(x)$.

（7）设 $f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x, & x\geqslant 0\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}x+1, & x<1\\ x, & x\geqslant 1\end{cases}$，求 $f(x)+g(x)$.

4．证明题

（1）证明方程 $x=a\sin x+b$（$a>0,b>0$），至少有一个正根，但不超过 $a+b$.

（2）证明方程 $x\cdot 2^x=1$ 至少有一个小于 1 的正根.

（3）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $a\leqslant f(x)\leqslant b$，证明存在 $x_0\in[a,b]$，使 $f(x_0)=x_0$.

第 2 章　导数与微分

2.1　导　　数

一、基本要求

（1）掌握导数的定义及其物理和几何的意义.
（2）掌握可导的充要条件.

二、考点知识概述

1．导数

（1）**定义**：设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域 $U(x_0,\delta)$ 有定义．如果 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在，则称函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处可导，且称这个极限值为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数，记作 $f'(x_0)$，$y'\big|_{x=x_0}$ 或者 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0}$，$\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0}$.即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

（2）导数的几何意义：$f'(x_0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 过其上一点 $(x_0,f(x_0))$ 的切线斜率，因此过点 $(x_0,f(x_0))$ 的切线方程为 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$；法线方程为 $y-f(x_0)=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$.

（3）物理意义：
路程 $s=s(t)$ 对时间 t 的导数 $s'(t)$ 是速率.
速率 $v=v(t)$ 对时间 t 的导数 $v'(t)$ 是加速度.
速率 $v=v(x)$ 对位移 x 的导数 $v'(x)$ 是速率相对于位移的变化率.
（4）可导与连续的关系：可导 $\Rightarrow$ 连续（反之未必）.
例如，$f(x)=|x|$，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，下面讨论它在 $x=0$ 处的导数.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}\text{ 不存在}$$

所以 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处连续，但在 $x=0$ 处不可导.
（5）左、右导数：
如果 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在，则称该极限值为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的左导数，记作 $f'_-(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

如果 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}$ 存在，则称该极限值为函数 $y=f\left(x\right)$ 在点 x_0 处的右导数，记作 $f'_+\left(x_0\right)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}$.

函数的左导数与右导数统称为单侧导数.

2．可导的充要条件

函数 $f\left(x\right)$ 在点 x_0 处可导的充要条件是 $f'_-\left(x_0\right)=f'_+\left(x_0\right)$.

3．导数的其他定义形式

$$f'\left(x_0\right)=\lim_{x\to x_0}\frac{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}，\quad f'\left(x_0\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

三、常用解题技巧

1．利用定义

如果 $f'\left(x_0\right)$ 存在，则

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x_0+a\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}=af'\left(x_0\right)$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x_0+a\Delta x\right)-f\left(x_0+b\Delta x\right)}{\Delta x}=\left(a-b\right)f'\left(x_0\right)$$

2．分段点导数的求法

（1）函数 $f\left(x\right)$ 在点 x_0 处可导的充要条件是 $f'_-\left(x_0\right)=f'_+\left(x_0\right)$.

（2）导数极限定理.

四、典型题解

【例 1】求函数 $f(x)=\cos x$ 的导数.

解　因为 $\cos(x+\Delta x)-\cos x=-2\sin\dfrac{2x+\Delta x}{2}\sin\dfrac{\Delta x}{2}$，所以

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\sin\dfrac{2x+\Delta x}{2}\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(-2\sin\frac{2x+\Delta x}{2}\cdot\frac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{2\cdot\dfrac{\Delta x}{2}}\right)=-\sin x$$

即 $(\cos x)'=-\sin x$.

【例 2】求函数 $f(x)=\begin{cases}e^{3x}-1, & x>0\\ x, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的导数.

解　注意到 $f(0)=0$.

$$f_+'(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{e^{3\Delta x}-1}{\Delta x}=3$$

$$f_-'(0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$$

因 $f_+'(0)\neq f_-'(0)$，故 $f'(0)$ 不存在.

【例 3】设 $f(x)=x^3+x$，按定义求 $f'(-1)$.

解　$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3+(x+\Delta x)-(x^3+x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x^3+3x^2\cdot\Delta x+3x\cdot\Delta x^2+\Delta x}{\Delta x}=3x^2+1$$

所以 $f'(-1)=4$.

【例 4】函数 $y=f(x)=2x+1$ 在 $(0,1)$ 处的切线方程.

解　$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(x+\Delta x)+1-2x-1}{\Delta x}=2$$

切线方程 $y-1=f'(0)(x-0)$，即 $y-2x-1=0$.

【例 5】设函数 $f(x)=\begin{cases}2x, & x\leqslant 1\\ ax+b, & x>1\end{cases}$，为了使函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续且可导，a、b 取什么值？

解　$f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，即 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)$，而

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}(ax+b)=a+b,\quad \lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}2x=2$$

因为 $f(1)=2$，故 $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=f(1)=2$，得 $a+b=2$.

$f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，则有

$$f_+'(1)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{a+a\Delta x-2+b}{\Delta x}=a$$

$$=f_-'(1)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{2+2\Delta x-2}{\Delta x}=2$$

且 $f_+'(1)=f_-'(1)=2$，故 $a=2$、$b=0$.

【例 6】设函数 $f(x)=(x-a)g(x)$，其中 $g(x)$ 在点 a 处连续，求 $f'(a)$.

解　因为没有假设 $g(x)$ 可导，所以不能用导数的乘法公式，只能用导数的定义，即

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)g(x)-0}{x-a}=\lim_{x\to a}g(x)=g(a)$$

【例 7】设 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导且 $f'(-1)=2$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-x)-f(1+x)}{x}$.

解　$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1-x)-f(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(1-x)-f(1)}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-f(1)}{x}$$

$$=-f'(1)-f'(1)=-4$$

2.2　求导法则与基本公式

一、基本要求

（1）掌握 16 个基本公式.
（2）掌握导数的四则运算法则.

二、考点知识概述

1．导数的基本公式

（1）$(C)'=0$；（2）$\left(x^{\mu}\right)'=\mu x^{\mu-1}$；

（3）$\left(a^{x}\right)'=a^{x}\ln a$；（4）$\left(\mathrm{e}^{x}\right)'=\mathrm{e}^{x}$；

（5）$\left(\log_a x\right)'=\dfrac{1}{x}\log_a \mathrm{e}=\dfrac{1}{x\ln a}$；（6）$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$；

（7）$(\sin x)'=\cos x$；（8）$(\cos x)'=-\sin x$；

（9）$(\tan x)'=\sec^2 x$；（10）$(\cot x)'=-\csc^2 x$；

（11）$(\sec x)'=\sec x\tan x$；（12）$(\csc x)'=-\csc x\cot x$；

（13）$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；（14）$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；

（15）$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$；（16）$(\operatorname{arccot} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$.

2．导数的四则运算法则

设$u(x)$、$v(x)$在点x处有导数，c为常数，则

（1）$\left[cu(x)\right]'=cu'(x)$；

（2）$\left[u(x)\pm v(x)\right]'=u'(x)\pm v'(x)$；

（3）$\left[u(x)v(x)\right]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$；

（4）$v(x)\neq 0$，$\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]'=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$.

三、常用解题技巧

1．要区分开 $f'(x_0)$ 与 $\left[f(x_0)\right]'$

$f'(x_0)$是先求导后代数，$\left[f(x_0)\right]'$是先代数后求导，所以后者一定等于 0.

2．利用导数的四则运算

四、典型题解

【例 1】求函数 $y = 3x^2 + 2x + \ln 4$ 的导数.

解 $y' = 3\times 2x + 2 = 6x + 2$

【例 2】设 $f(x) = x^4 + 5x + \pi$，求 $f'(x)$.

解 $f'(x) = (x^4)' + 5(x)' + (\pi)' = 4x^3 + 5$

【例 3】设 $y = \sin x \ln x$，求 $y'\big|_{x=\frac{\pi}{2}}$.

解 $y' = (\sin x)'\ln x + \sin x(\ln x)' = \cos x\cdot\ln x + \sin x\cdot\dfrac{1}{x}$

所以 $y'\big|_{x=\frac{\pi}{2}} = \dfrac{2}{\pi}$.

【例 4】求 $y = \dfrac{\tan x}{x}$ 的导数.

解 $y' = \dfrac{(\tan x)'\cdot x - x'\cdot\tan x}{x^2} = \dfrac{\sec^2 x\cdot x - \tan x}{x^2}$

【例 5】求 $y = \mathrm{e}^x\arctan x$ 的导数.

解 $y' = (\mathrm{e}^x)'\arctan x + \mathrm{e}^x\cdot(\arctan x)'$

$$= \mathrm{e}^x\cdot\arctan x + \mathrm{e}^x\cdot\frac{1}{1+x^2} = \mathrm{e}^x\left(\arctan x + \frac{1}{1+x^2}\right)$$

【例 6】 $f(x) = \dfrac{3}{5-x} + \dfrac{x^2}{5}$，求 $f'(0)$ 与 $f'(2)$.

解 $f'(x) = \dfrac{3}{(5-x)^2} + \dfrac{2}{5}x$， $f'(0) = \dfrac{3}{25}$， $f'(2) = \dfrac{17}{15}$

【例 7】 $f(x) = \sec x\cdot\ln x - \sqrt{x}\cdot 2^x$，求 $f'(x)$.

解 $f'(x) = \dfrac{\sec x}{x} + \sec x\cdot\tan x\cdot\ln x - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cdot 2^x - 2^x\cdot\sqrt{x}\cdot\ln 2$

2.3　复合函数求导法则

一、基本要求

掌握复合函数求导的链式法则.

二、考点知识概述

复合函数求导原理：

如果 $u = g(x)$ 在点 x 处可导，而 $y = f(u)$ 在点 $u = g(x)$ 处可导，则复合函数 $y = f[g(x)]$ 在点 x 处可导，且其导数为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(u)g'(x) \text{或者} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \text{（称链式法则）}$$

若 $y=y(u)$、$u=u(x)$、$x=x(t)$ 都可导，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=y'_u\cdot u'_x\cdot x'_t$.

三、常用解题技巧

1. $[f(x)]^{g(x)}$ 型函数求导

利用对数恒等式将其变形为 $[f(x)]^{g(x)}=\mathrm{e}^{\ln[f(x)]^{g(x)}}=\mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}$，然后利用复合函数求导.

2. $|f(x)|$ 型函数求导

利用其等价形式 $|f(x)|=\sqrt{f^2(x)}$，然后利用复合函数求导.

四、典型题解

【例 1】函数 $y=\sqrt{x^2+1}$，求 $f'(0)$ 与 $f'(1)$.

解　$y'=(\sqrt{x^2+1})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}}(x^2+1)'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

因此 $f'(0)=0$，$f'(1)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

【例 2】求 $y=\mathrm{e}^{\sin x}$ 的导数.

解　$y'=\mathrm{e}^{\sin x}\cdot(\sin x)'=\cos x\cdot\mathrm{e}^{\sin x}$

【例 3】求 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的导数.

解
$$y'=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}(x+\sqrt{1+x^2})'$$
$$=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

【例 4】求 $y=\ln(\ln x)$ 的导数.

解　$y'=\dfrac{1}{\ln x}(\ln x)'=\dfrac{1}{\ln x}\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x\ln x}$

【例 5】求 $y=(\cos x^3)^2$ 的导数.

解
$$y'=2\cos x^3\cdot(\cos x^3)'$$
$$=2\cos x^3\cdot(-\sin x^3)\cdot 3x^2=-6x^2\cdot\sin x^3\cdot\cos x^3$$

【例 6】求 $y=\arctan(\sin^2 x)$ 的导数.

解
$$y'=\frac{1}{1+(\sin^2 x)^2}(\sin^2 x)'=\frac{1}{1+(\sin^2 x)^2}2\sin x(\sin x)'$$
$$=\frac{1}{1+(\sin^2 x)^2}2\sin x\cos x=\frac{1}{1+(\sin^2 x)^2}\sin 2x$$

【例 7】求 $y=\arcsin\dfrac{1}{x}$ 的导数.

解　$y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}\left(\dfrac{1}{x}\right)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}\cdot\dfrac{1}{-x^2}=\dfrac{1}{-|x|\sqrt{x^2-1}}$

【例 8】求 $y=3^{\sin x}$ 的导数.

解　$y'=3^{\sin x}\ln 3(\sin x)'=\ln 3\cdot 3^{\sin x}\cos x$

【例 9】求 $y=\mathrm{e}^{-x}\cos 3x$ 的导数.

解　$y'=(\mathrm{e}^{-x})'\cos 3x+\mathrm{e}^{-x}(\cos 3x)'$

$=-\mathrm{e}^{-x}\cos 3x-\mathrm{e}^{-x}3\sin 3x=-\mathrm{e}^{-x}(\cos 3x+3\sin 3x)$

【例 10】求 $y=\sin\left[\sin(\sin x)\right]$ 的导数.

解　$y'=\left\{\sin\left[\sin(\sin x)\right]\right\}'=\cos\left[\sin(\sin x)\right]\cdot\left[\sin(\sin x)\right]'$

$=\cos\left[\sin(\sin x)\right]\cdot\cos(\sin x)(\sin x)'$

$=\cos x\cdot\cos(\sin x)\cdot\cos\left[\sin(\sin x)\right]$

【例 11】求 $y=\dfrac{\sin 2x}{x}$ 的导数.

解　$y'=\dfrac{\cos 2x\cdot 2\cdot x-\sin 2x}{x^2}=\dfrac{2x\cos 2x-\sin 2x}{x^2}$

2.4　隐函数求导及其他

一、基本要求

（1）掌握隐函数求导原理.

（2）掌握参数式函数求导.

（3）掌握反函数求导法则.

（4）理解相关变化率.

二、考点知识概述

1．隐函数的导数

$F(x,y)=0$，在一定的条件下能确定一个函数 $y=f(x)$，且可求导数. $y=f(x)$ 的导数求法：直接求导，对 $F(x,y)=0$ 两边同时求导；把 y 看成 x 的函数，利用复合函数求导，求出 y'.

2．参数式函数的导数

如果 $x=\varphi(t)$、$y=\psi(t)$ 都是可导的，且 $\varphi'(t)\neq 0$，则由参数方程 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}$ 确定的函数 $y=f(x)$ 也可导，且 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$.

3．反函数求导

如果函数 $x=f(y)$ 在区间 I_y 内单调、可导且 $f'(y)\neq 0$，则它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 在区间

$I_x=\left\{x\middle|x=f\left(y\right),y\in I_y\right\}$内也可导，且$\left[f^{-1}\left(x\right)\right]'=\dfrac{1}{f'\left(y\right)}$或$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}$.

4．相关变化率

设$x=x\left(t\right)$、$y=y\left(t\right)$都是可导函数，而变量x与y之间存在某种关系，则变化率$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$与$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$之间也存在一定的关系，这两个相互依赖的变化率称为相关变化率.

三、典型题解

【例 1】试求由上半椭圆的参数方程$\begin{cases}x=a\cos t\\ y=b\sin t\end{cases}$，$0<t<\pi$所确定的函数$y=y(x)$的导数.

解　$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{b\cos t}{-a\sin t}=\dfrac{b}{-a}\cot x$

【例 2】求$\begin{cases}x=\sin^3 t\\ y=\cos^3 t\end{cases}$在$t=0$、$\dfrac{\pi}{2}$处的$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解　$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{-3\cos^2 t\cdot\sin t}{3\cos t\cdot\sin^2 t}=-\dfrac{\cos t}{\sin t}=-\cot t$

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=-\cot t\Big|_{t=\frac{\pi}{2}}=0,\ \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}=-\cot t\big|_{t=0}=-\infty$$

【例 3】设$\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$，求$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}$、$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\pi}$.

解　$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=\left.\dfrac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=\left.\dfrac{a\sin t}{a(1-\cos t)}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=1$

同理可得$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\pi}=0$.

【例 4】 $x+y=\mathrm{e}^{xy}$，求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解　$1+y'=\mathrm{e}^{xy}(y+xy')\Rightarrow y'=\dfrac{y\mathrm{e}^{xy}-1}{1-x\mathrm{e}^{xy}}$

【例 5】 $y=1+x\mathrm{e}^{y}$，求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解　$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{y}+x\mathrm{e}^{y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

所以　$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{e}^{y}}{2-y}$.

【例 6】求 $y=x^x$ 的导数.

解　两边取对数得 $\ln y = x\ln x$，然后两边同时求导数得 $\frac{1}{y}\cdot y' = \ln x + x\cdot\frac{1}{x}$，则 $y'=(1+\ln x)x^x$.

【例 7】求曲线 $\begin{cases} x=t^2 \\ y=t^3+1 \end{cases}$ 在 $t=1$ 处所对应的切线和法线方程.

解　$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{3}{2}t$，当 $t=1$ 时，$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{t=1}=\frac{3}{2}$ 而 $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$，则切线方程为 $3x-2y+1=0$；法线方程为 $2x+3y-8=0$.

【例 8】用对数求导法求函数 $y=\left(\frac{x}{1+x}\right)^x$ 的导数.

解　$\ln y = x\ln x - x\ln(1+x)$

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \ln x + x\cdot\frac{1}{x} - \ln(1+x) - x\cdot\frac{1}{1+x}$$

$$y'=\left(\frac{x}{1+x}\right)^x\left(\ln\frac{x}{1+x}+\frac{1}{1+x}\right)$$

2.5 高 阶 导 数

一、基本要求

（1）理解高阶导数的符号.

（2）掌握高阶导数的运算法则.

（3）掌握初等函数的高阶导数公式.

二、考点知识概述

1．高阶导数

（1）**定义**：$y=f(x)$ 的导数，$y'=f'(x)$ 仍然是 x 的函数，把 $y'=f'(x)$ 的导数称为函数 $y=f(x)$ 的二阶导数，记作 y'' 或 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$，即 $y''=(y')'$ 或 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$．类似地，把二阶导函数的导数，称为三阶导数．二阶及二阶以上的导数统称为高阶导数.

（2）高阶导数的符号：$y'',y''',y^{(4)},\cdots,y^{(n)}$，或 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2},\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3},\frac{\mathrm{d}^4y}{\mathrm{d}x^4},\cdots,\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}$.

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(w)$，$(w)'$ 是求导算子，意义：对括号内的表达式求导，如 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$.

2．高阶导数的运算法则

（1）$(u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)}$.

（2）$(cu)^{(n)}=cu^{(n)}$（c 为常数）.

（3）$(uv)^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}$.

3．初等函数的高阶导数公式

（1）$(e^x)^{(n)}=e^x$；

（2）$(e^{ax})^{(n)}=a^n e^{ax}$；

（3）$(a^x)^{(n)}=a^x(\ln a)^n$；

（4）$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\dfrac{n}{2}\pi\right)$；

（5）$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+\dfrac{n}{2}\pi\right)$；

（6）$(x^\alpha)^{(n)}=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$；

（7）$(\ln x)^{(n)}=\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$.

三、常用解题技巧

1．参数方程的二阶导数

【例 1】参数方程$\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$，求$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y_t'}{x_t'}=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]=\frac{d}{dt}\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]\frac{dt}{dx}=\left(\frac{\psi''\varphi'-\psi'\varphi''}{(\varphi')^2}\right)\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\psi''\varphi'-\psi'\varphi''}{(\varphi')^2}\frac{1}{\varphi'}=\frac{\psi''\varphi'-\psi'\varphi''}{(\varphi')^3}$$

2．乘法的高阶导数$(uv)^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}$

在利用乘法公式求高阶导数时，一般的情况下将高阶导数先为 0 的函数看成公式中的v.

3．隐函数的二阶导数

$F(x,y)=0$，在一定条件下确定一个可导函数$y=f(x)$.

方法一：对$F(x,y)=0$直接求导，求出y'，再对y'求导，解出y''.

方法二：对$F(x,y)=0$连续两次求导得出y''.

四、典型题解

【例 2】求$y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$的二阶导数.

解　$y'=\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot(x+\sqrt{1+x^2})'=\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(1+\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$$y''=-\frac{1}{1+x^2}\cdot(\sqrt{1+x^2})'=-\frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}=-\frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

【例 3】求函数 $y=\sin^2 x$ 的各阶导数.

解 $y'=2\sin x\cos x=\sin 2x,\quad y''=2\cos 2x=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$

$$y'''=2^2\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=2^2\sin\left(2x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y^{(4)}=2^3\cos\left(2x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)=2^3\sin\left(2x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\vdots$$

$$y^{(n)}=2^{n-1}\sin\left[2x+(n-1)\cdot\frac{\pi}{2}\right]$$

【例 4】求函数 $y=\mathrm{e}^{x^2}$ 的二阶导数.

解 $y'=\mathrm{e}^{x^2}\cdot 2x$， $y''=\mathrm{e}^{x^2}\cdot 2x\cdot 2x+\mathrm{e}^{x^2}\cdot 2=4x^2\mathrm{e}^{x^2}+2\mathrm{e}^{x^2}$

【例 5】设 $y=\mathrm{e}^{-x}\sin x$， 求y''.

解 $y'=-\mathrm{e}^{-x}\sin x+\mathrm{e}^{-x}\cos x=\mathrm{e}^{-x}(\cos x-\sin x)$

$$y''=-\mathrm{e}^{-x}(\cos x-\sin x)+\mathrm{e}^{-x}(-\sin x-\cos x)=-2\mathrm{e}^{-x}\cos x$$

【例 6】求 $y=f(\ln x)$ 的二阶导数（这里的 f 为二阶可导函数）.

解 $y'=f'(\ln x)\cdot\frac{1}{x}$

$$y''=f''(\ln x)\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}+f'(\ln x)\cdot\frac{1}{-x^2}=\frac{1}{x^2}[f''(\ln x)-f'(\ln x)]$$

【例 7】求函数 $y=\frac{1}{x^2-3x-2}$ 的各阶导数.

解 $y=\frac{1}{x^2-3x-2}=\frac{1}{(x-1)(x-2)}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}=(x-2)^{-1}-(x-1)^{-1}$

$$y'=-[(x-2)^{-2}-(x-1)^{-2}]$$

$$y''=(-1)(-2)[(x-2)^{-3}-(x-1)^{-3}]$$

$$\vdots$$

$$y^{(n)}=(-1)^n n![(x-2)^{-(n+1)}-(x-1)^{-(n+1)}]$$

2.6 微 分

一、基本要求

（1）掌握微分的定义.

（2）掌握可微的充要条件.

（3）理解微分的几何意义.

（4）掌握微分法则.

（5）理解微分在近似计算中的应用.

二、考点知识概述

1．微分的定义

设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域 $U(x_0,\delta)$ 内有定义，且 $x_0+\Delta x\in U(x_0,\delta)$.

如果函数增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 可以表示为 $\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$，其中 A 是不依赖于 Δx 的常量，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处是可微的，称 $A\Delta x$ 为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处相应于自变量增量 Δx 的微分，记作 $\mathrm{d}y$，即 $\mathrm{d}y=A\Delta x$.

2．几何意义

由图 2.1 可知：

$$MQ=\Delta x，\quad QN=\Delta y$$

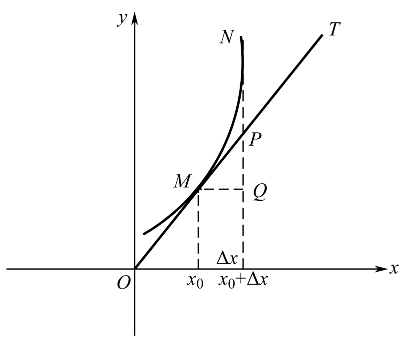

图 2.1

过点 M 做曲线 $y=f(x)$ 的切线 MT，与 NQ 交于 P，$QP=f'(x_0)\Delta x=\mathrm{d}y$，所以用 $\mathrm{d}y$（即 QP）代替 Δy（即 QN）. 这就是微分的几何意义（在一点附近以线性部分代替非线性部分，这是工程上常用的解决非线性问题的思想）.

3．可微的充要条件

函数 $y=f(x)$ 在点 x 处可微的充分必要条件是 $y=f(x)$ 在点 x 处可导，且 $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$.

4．微分法则

（1）四则运算.

① $\mathrm{d}[cu(x)]=c\,\mathrm{d}u(x)$；

② $\mathrm{d}[u(x)\pm v(x)]=\mathrm{d}u(x)\pm\mathrm{d}v(x)$；

③ $\mathrm{d}(uv)=v\,\mathrm{d}u+u\,\mathrm{d}v$；

④ $\mathrm{d}\dfrac{u}{v}=\dfrac{v\,\mathrm{d}u-u\,\mathrm{d}v}{v^2}$.

（2）复合函数 $y=f[g(x)]$ 的微分（一阶微分形式的不变性）.

$\mathrm{d}y=y'_x\,\mathrm{d}x=f'(u)g'(x)\mathrm{d}x$，$g'(x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}u$，即有 $\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u$（$\mathrm{d}y=y'_x\,\mathrm{d}x$）.

5．基本初等函数的微分公式

（1）$\mathrm{d}x^{\mu}=\mu x^{\mu-1}\mathrm{d}x$；　（2）$\mathrm{d}a^{x}=a^{x}\ln a\mathrm{d}x$；

（3）$\mathrm{d}\mathrm{e}^{x}=\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x$；　（4）$\mathrm{d}\log_a x=\dfrac{1}{x}\log_a \mathrm{e}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{x\ln a}\mathrm{d}x$；

（5）$\mathrm{d}\ln x=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$；　（6）$\mathrm{d}\sin x=\cos x\mathrm{d}x$；

（7）$\mathrm{d}\cos x=-\sin x\mathrm{d}x$；　（8）$\mathrm{d}\tan x=\sec^2 x\mathrm{d}x$；

（9）$\mathrm{d}\cot x=-\csc^2 x\mathrm{d}x$；　（10）$\mathrm{d}\sec x=\sec x\tan x\mathrm{d}x$；

（11）$\mathrm{d}\csc x=-\csc x\cot x\mathrm{d}x$；　（12）$\mathrm{d}\arcsin x=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$；

（13）$\mathrm{d}\arccos x=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$；　（14）$\mathrm{d}\arctan x=\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$；

（15）$\mathrm{d}\,\mathrm{arccot}\, x=-\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

6．微分的应用

（1）近似计算.

① 函数增量的近似值：$\Delta y=f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)=f(x_0')\Delta x+o\left(\Delta x\right)$，当$|\Delta x|$很小时，有$\Delta y\approx f'\left(x_0\right)\Delta x=\mathrm{d}y$.

②函数值的近似值：$\Delta y\approx f'\left(x_0\right)\Delta x=\mathrm{d}y$，可得$f\left(x_0+\Delta x\right)\approx f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\Delta x$.

（2）误差估计.

$y=f\left(x\right)$的绝对误差的近似值：$|\Delta y|\approx|\mathrm{d}y|=|y'||\Delta x|\leqslant|y'|\delta_x=\delta_y$，其中$\delta_x$为自变量的绝对误差限.

$y=f\left(x\right)$的相对误差限：$\dfrac{\delta_y}{|y|}=\left|\dfrac{y'}{y}\right|\delta_x$，其中$\delta_x$为自变量的绝对误差限.

三、常用解题技巧

（1）函数可微$\Leftrightarrow$函数可导$\Rightarrow$函数连续$\Rightarrow$函数有极限$\Rightarrow$函数左、右极限存在.

（2）利用一阶微分形式的不变性（即复合函数求导）.

四、典型题解

【例 1】求 $y=x^2\mathrm{e}^{2x}$ 的微分.

解　$\mathrm{d}y=(2x\mathrm{e}^{2x}+2x^2\mathrm{e}^{2x})\mathrm{d}x$

【例 2】求 $y=\ln x+x\cos x^2$ 的微分.

解　$\mathrm{d}y=\mathrm{d}(\ln x+x\cos x^2)=\mathrm{d}(\ln x)+\mathrm{d}(x\cos x^2)$

$$=\frac{1}{x}\mathrm{d}x+(\cos x-2\sin x^2\cdot x^2)\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{x}-2x^2\sin x^2+\cos x\right)\mathrm{d}x$$

【例 3】求 $y=\ln 2^x+2^x+x^2$ 的微分.

解　$\mathrm{d}y=\mathrm{d}(\ln 2^x+2^x+x^2)=(\ln 2+2^x\ln 2+2x)\mathrm{d}x$

故 $dy=(\ln 2+2^x\ln 2+2x)dx$.

【例 4】求 $y=3e^x\sin x-\dfrac{1}{\ln x}$ 的微分.

解　$dy=d\left(3e^x\sin x-\dfrac{1}{\ln x}\right)=\left[3e^x(\cos x+\sin x)+\dfrac{1}{x\ln^2 x}\right]dx$

故 $dy=[3e^x(\cos x+\sin x)+\dfrac{1}{x\ln^2 x}]dx$.

【例 5】求 $y=x\ln x-x$的微分 .

解　$dy=d(x\ln x-x)=\left(\ln x+x\cdot\dfrac{1}{x}-1\right)dx=\ln x dx$

【例 6】利用微分求 $\sqrt[3]{1.02}$ 的近似值.

解　设 $f(x)=\sqrt[3]{x}$ ，$x_0=1$ ，$\Delta x=0.02$ ，则 $f'(x)=\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ ，$f'(1)=\dfrac{1}{3}$ ，从而有

$$\sqrt[3]{1.02}\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x=f(1)+\frac{1}{3}\times 0.02=1+\frac{1}{3}\times 0.02\approx 1.007$$

测 试 题 A

1．填空题

（1）设 $f(x)=\sqrt{x^2+4}$ ，则$f'(1)=$__________.

（2）设 $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$，则$f'(1)=$__________.

（3）若 $y=2^{\sin x}$ ，则 $y'=$__________.

（4）若 $y=\arcsin x^2$ ，则 $y'=$__________.

（5）若 $y=\ln\sin x$ ，则 $y'=$__________.

（6）若 $f(x-1)=x^2-1$ ，则 $f'(x)=$__________.

（7）若 $y=e^{2x}\sin(x^2)$ ，则 $y'=$__________.

（8）若 $y=\arctan x^2$ ，则 $y'=$__________.

（9）若 $f\left(x\right)=x-\dfrac{1}{2}\sin x$ ，则 $\dfrac{dx}{dy}=$__________.

（10）若 $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$ ，则 $[f(2)]'=$__________.

（11）若 $y=f(x)=e^{-3x^2}$ ，则 $y'=$__________.

（12）若 $y=e^x\cos 3x$ ，则 $y'=$__________.

（13）若 $y=\sqrt{1+\sin x}$ ，则 $y'(0)=$__________.

（14）若 $x+y^2=1$ ，则 $\dfrac{dy}{dx}=$__________.

（15）若 $xy=e^{x+y}$ ，则 $\dfrac{dy}{dx}=$__________.

（16）若 $x^2-\sin y=1$ ，则 $\dfrac{dy}{dx}=$__________.

（17）若 $y=\ln 2x$，则 $\mathrm{d}y=$__________.

（18）若 $y=\sin(\mathrm{e}^x)$，则 $\mathrm{d}y=$__________.

（19）若 $y=x^2\mathrm{e}^{2x}$，则 $\mathrm{d}y=$__________.

（20）若 $y=\sin^2 3x$，则 $\mathrm{d}y=$__________.

（21）若 $y=3\mathrm{e}^x\tan x$，则 $\mathrm{d}y=$__________.

（22）若 $\mathrm{e}^{xy}+y-\sin 1=0$，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$__________.

（23）若 $f(x)=x\ln x$，则$f''(x)=$__________.

（24）若 $g=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$，$y$为二阶可导函数，则$y''=$__________.

（25）若 $y=a^x\quad(a>0,a\neq 1)$，则$y^{(n)}=$__________.

（26）已知函数 $f'(x)=4x^3+x$，$f(1)=-1$，则此函数是__________.

（27）设曲线 $y=x^3-3x$ 上切线平行于 x 轴的点是__________.

（28）曲线 $x^2+y^2=1$ 在 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 处的切线方程为__________.

2．选择题

（1）已知函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内可导，且 $x_0\in(a,b)$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$ 的值为（　　）.

A．$f'(x_0)$　　B．$2f'(x_0)$　　C．$-2f'(x_0)$　　D．0

（2）$y=f(x)$ 在点（　　）处的切线平行于直线 $y=2x-3$.

A．$(\frac{1}{2},-\ln 2)$　　B．$(\frac{1}{2},-\ln\frac{1}{2})$　　C．$(2,\ln 2)$　　D．$(2,-\ln 2)$

（3）若 $f(x)$ 的导数存在，设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2+3x)-f(2)}{x}=9$，则 $f'(2)=$（　　）.

A．8　　B．3　　C．2　　D．1

（4）$f(0)=0$ 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=2$，则 $f'(0)=$（　　）.

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

（5）$f(x)=ax^3+3x^2+2$，$f'(-1)=4$，则a 的值为（　　）.

A．$\dfrac{19}{3}$　　B．$\dfrac{16}{3}$　　C．$\dfrac{13}{3}$　　D．$\dfrac{10}{3}$

（6）若函数 $y=f(ax+b)$，$y^{(n)}=$（　　）.

A．$a^n f^{(n)}(ax+b)$　　B．$f^{(n)}(ax+b)$　　C．$af^{(n)}(ax+b)$　　D．$ax+b$

（7）已知 $f(x)$ 在点 x_0 处可导的充要条件是（　　）.

A．$y=f(x)$ 在点 x_0 处连续　　B．$y=f(x)$ 在点 x_0 处连续且没有尖点

C．$y=f(x)$ 在点 x_0 处可微　　D．$y=f(x)$ 在点 x_0 处具有左、右导数

（8）设 $y=\tan x$，则$y'=$（　　）.

A．$\sec^2 x$　　B．$\sec x\tan x$　　C．$\dfrac{1}{1+x^2}$　　D．$-\dfrac{1}{1+x^2}$

（9）若 $f(x)=x^3$、$g(x)=\ln x$，则 $f\left[\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x)\right]=$（　　）.

A．x^3　　B．$\dfrac{1}{x^3}$　　C．$\dfrac{1}{x^2}$　　D．$\dfrac{1}{x}$

（10）设 $y=4x^3$，则 $y^{(4)}(0)=$（　　）.

A．4!　　B．2!　　C．1　　D．0

（11）若 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, x\leqslant 1\\ ax+b, x>1\end{cases}$ 在 $x=1$ 处连续且可导，则 a、b 的值分别为（　　）.

A．$a=0$、$b=0$　　B．$a=0$、$b=1$　　C．$a=2$、$b=0$　　D．$a=1$、$b=1$

（12）已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{2x}-2x$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{\mathrm{e}^x-1}=$（　　）.

A．0　　B．1　　C．2　　D．4

（13）设 $y=\mathrm{e}^{\arctan\sqrt{x}}$，则 $\mathrm{d}y=$（　　）.

A．$\mathrm{e}^{\arctan\sqrt{x}}$　　B．$\mathrm{e}^{\arctan\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

C．$\mathrm{e}^{\arctan\sqrt{x}}\dfrac{1}{1+x}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$　　D．$\mathrm{e}^{\arctan\sqrt{x}}\dfrac{1}{1+x}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

（14）设 $y=x+\ln x$，则 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=$（　　）.

A．$\dfrac{x+1}{x}$　　B．$\dfrac{x}{1+x}$　　C．$1+\dfrac{1}{x}$　　D．$-\dfrac{x}{1+x}$

（15）曲线 $y=x^3+x+1$，则过曲线上一点(0, 1)的切线方程为（　　）.

A．$y=x+1$　　B．$y=x-1$　　C．$y=-x+1$　　D．$y=-x-1$

3．解答题

（1）设 $y=\arctan x$，试证它满足方程 $(1+x^2)y''+2xy'=0$.

（2）若 $f(x)=\arctan\sqrt{x^2-1}$，求 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(\sqrt{5})-f(\sqrt{5}+2h)}{h}$.

（3）设 $f(x)=\dfrac{x}{\cos x}$，求 $f'(0)$、$f'(\pi)$.

（4）试求由摆线参数方程 $\begin{cases}x=\ln t\\ y=t\end{cases}$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 的二阶导数.

（5）曲线 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=2t+1\\ y=t^3+t^2\end{cases}$ 确定，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$、$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

测 试 题 B

1．求 $\cos 29^\circ$ 的值.

2．求 $\arcsin(\sin x)$ 的导数.

3．若 $f(x)=\arctan\sqrt{x^2-1}$，求 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(\sqrt{5})-f(\sqrt{5}+2h)}{h}$.

4．设函数 $f(x)=\begin{cases} x^m\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ （m为整数）．

试问：（1）m等于何值时，$f(x)$在$x=0$处连续；

（2）m等于何值时，$f(x)$在$x=0$处可导；

（3）m等于何值时，$f'(x)$在$x=0$处连续．

5．设 $f(x_0)=0$、$f'(x_0)=4$，试求极限 $\lim\limits_{\Delta\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)}{\Delta x}$．

第 3 章　中值定理与导数的应用

3.1　微分中值定理

一、基本要求

（1）掌握费马定理.
（2）掌握罗尔定理.
（3）掌握拉格朗日中值定理.
（4）掌握柯西中值定理.

二、考点知识概述

1．费马定理

设 $f(x)$ 在 x_0 处取得极值，若 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则 $f'(x_0)=0$.

几何意义如图 3.1 所示。

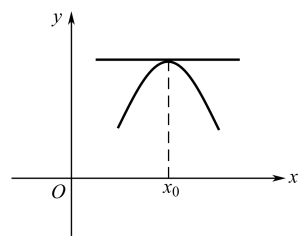

图 3.1

2．罗尔定理

设函数 $y=f(x)$ 满足下列条件：

（1）在闭区间 $[a,b]$ 上连续；

（2）在开区间 (a,b) 内可导；

（3） $f(a)=f(b)$.

则至少有一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)=0$.

几何意义如图 3.2 所示.

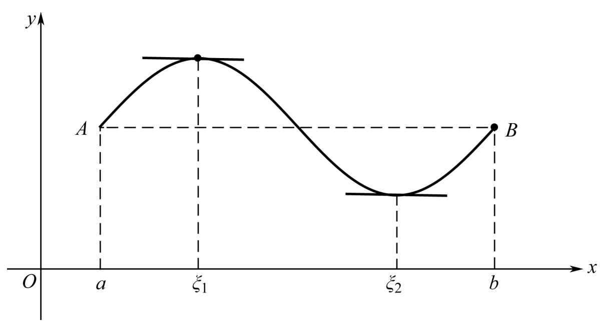

图 3.2

注:（1）定理条件缺一不可;

（2）不满足定理条件，曲线仍可能有水平切线.

3．拉格朗日中值定理

设函数 $y=f(x)$ 满足下列条件：

（1）在闭区间 $[a,b]$ 上连续；

（2）在开区间 (a,b) 内可导.

则至少有一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

几何意义如图 3.3 所示.

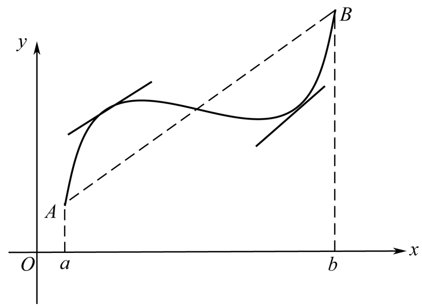

图 3.3

应用：

（1）如果函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上的导数恒为 0，那么 $f(x)$ 在区间 I 上是一个常数.

（2）如果函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 (a,b) 内可导，且 $f'(x)\equiv g'(x)$，则 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 (a,b) 内相差一个常数 C，即 $f(x)=g(x)+C$.

4．柯西中值定理

如果函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足条件：

（1）在闭区间 $[a,b]$ 上连续；

（2）在开区间 (a,b) 内可导；

（3）对任一 $x\in(a,b)$，$g'(x)\neq 0$.

那么在 (a,b) 内至少有一点 ξ，使

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

罗尔定理是拉格朗日中值定理的特例，拉格朗日中值定理是柯西中值定理的特例。

三、常用解题技巧

1．利用拉格朗日中值定理证明不等式

【例 1】如果 $0<a<b$，证明 $\dfrac{b-a}{b}<\ln\dfrac{b}{a}<\dfrac{b-a}{a}$.

证　设 $f(x)=\ln x$，显然 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续且可导，所以 $f(x)$ 满足拉格朗日中值定理的条件，有 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$，即 $\ln b-\ln a=\dfrac{1}{\xi}(b-a)$，$a<\xi<b$.

故 $\dfrac{b-a}{b}<\ln b-\ln a<\dfrac{b-a}{a}$，即 $\dfrac{b-a}{b}<\ln\dfrac{b}{a}<\dfrac{b-a}{a}$.

2．利用中值定理证明方程的零点

（1）证明 $f(x)=0$ 的零点的个数.

方法：先利用零点定理证明 $f(x)=0$ 的零点个数，再根据方程的次数或罗尔定理或单调性反证.

【例 2】证明方程 $e^x-x^2-3x-1=0$ 有且仅有 3 个根.

证　函数 $f(x)=e^x-x^2-3x-1$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有任意阶连续导数，且 $f(-3)<0$，$f(-1)>0$，$f(1)<0$，$f(4)>0$. 由零点定理知在 $(-3,-1)$、$(-1,1)$、$(1,4)$ 这 3 个区间上均存在零点，现设函数还有第 4 个零点，3 次利用罗尔定理可知 $f'''(x)$ 至少有一个零点，但 $f'''(x)=e^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上不可能有零点，矛盾.

所以方程 $e^x-x^2-3x-1=0$ 有且仅有 3 个根.

（2）证明 $f(x)=0$ 的导数（一阶、二阶、三阶等）的零点个数.

方法：一阶导数零点的个数，利用 1 次罗尔定理；

二阶导数零点的个数，利用 2 次罗尔定理；

三阶导数零点的个数，利用 3 次罗尔定理.

【例 3】设 $f(x)=(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$，不用求导证明方程 $f'''(x)=0$ 只有一个实根.

证　$f(x)$ 在 $[2,3]$、$[3,4]$、$[4,5]$ 上均满足罗尔定理，于是 $\xi_1\in(1,2)$，有 $f'(\xi_1)=0$；$\xi_2\in(2,3)$，有 $f'(\xi_2)=0$；$\xi_3\in(3,4)$，有 $f'(\xi_3)=0$.

$f'(x)$ 在区间 $[\xi_1,\xi_2]$、$[\xi_2,\xi_3]$ 上分别满足罗尔定理，于是 $f''(x_1)=0$，$x_1\in(\xi_1,\xi_2)$；$f''(x_2)=0$，$x_2\in(\xi_2,\xi_3)$.

而函数 $f''(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上又满足罗尔定理.

所以至少有一点 $\xi\in(1,4)$，使 $f'''(\xi)=0$，即 ξ 是 $f'''(x)=0$ 的一个实根.

又 $f(x)$ 是四次多项式，而 $f'''(x)$ 是一次函数，一次方程只有一个实根，所以方程 $f'''(x)=0$ 只有一个实根.

3．证明 $f(x)=0$ 或 $f(x)=c$.

方法：证明 $f'(x)=0$，则 $f(x)=c$，进而可以确定常数的数值.

【例 4】证明函数 $f(x)=\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$.

证　$x\in\mathbf{R}$，而 $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=0$，所以 $f(x)$ 为常数.

令 $x=1$，则 $\arcsin 1+\arccos 1=\dfrac{\pi}{2}+0=\dfrac{\pi}{2}$.

所以 $\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$.

4．证明原函数与导数之间的关系

证明步骤：

① 做辅助函数 $F(x)$；

② 验证 $F(x)$ 满足罗尔定理的条件，得出命题的证明.

构造辅助函数是证明的关键一步，下面介绍构造辅助函数的两种方法.

（1）原函数法.

① 将要证的结论中的 ξ 换成 x；

② 通过恒等变形将结论化为易消除导数符号的形式；

③ 用观察法或积分法求出原函数（即不含导数符号的式子），将常数取为 0；

④ 移项，使等式一边为 0，另一边即为所求辅助函数 $F(x)$.

【例 5】设 $f(x)$、$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=0$，证明存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$.

分析： $f'(x)+f(x)g'(x)=0\Rightarrow\dfrac{f'(x)}{f(x)}=-g'(x)\Rightarrow\int\dfrac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int-g'(x)\mathrm{d}x\Rightarrow\ln f(x)=-g(x)\Rightarrow$ $f(x)=\mathrm{e}^{-g(x)}\Rightarrow f(x)\mathrm{e}^{g(x)}=1$

证 令 $F(x)=f(x)\mathrm{e}^{g(x)}$，则 $F(a)=f(a)\mathrm{e}^{g(a)}=0$， $F(b)=f(b)\mathrm{e}^{g(b)}=0$.

$F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，由罗尔定理知，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $F'(\xi)=0$，即 $F'(\xi)=f'(\xi)\mathrm{e}^{g(\xi)}+f(\xi)\mathrm{e}^{g(\xi)}g'(\xi)=0\Rightarrow f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$.

（2）常数值 k 法

步骤如下.

① 令常数部分为 k；

② 恒等变形，使等式一端为 a 及 $f(a)$ 构成的代数式，另一端为 b 及 $f(b)$ 构成的代数式；

③ 分析关于端点的表达式是否为对称式或轮换对称式，若是，则只要把端点 a 改成 x，相应的函数值 $f(a)$ 改成 $f(x)$，那么换变量后的端点表达式就是所求的辅助函数 $F(x)$.

【例 6】设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，证明：存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $\dfrac{bf(b)-af(a)}{b-a}=f(\xi)+\xi f'(\xi)$.

分析： 令 $\dfrac{bf(b)-af(a)}{b-a}=k\Rightarrow bf(b)-af(a)=k(b-a)\Rightarrow bf(b)-kb=af(a)-ka$，于是可令 $F(x)=xf(x)-kx$.

证 令 $\dfrac{bf(b)-af(a)}{b-a}=k$， $F(x)=xf(x)-kx$， 于是 $F(a)=af(a)-ka=\dfrac{abf(a)-abf(b)}{b-a}$，$F(b)=bf(b)-kb=\dfrac{abf(a)-abf(b)}{b-a}$， $F(a)=F(b)$， $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，由罗尔定理可知，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $F'(\xi)=0$，即 $f(\xi)+\xi f'(\xi)-k=0$，故 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=k=\dfrac{bf(b)-af(a)}{b-a}$.

四、典型题解

【例 7】证明方程 $x^3+5x-1=0$ 在开区间 $(0,1)$ 内只有一个实根.

证 （1）存在性.

设 $f(x)=x^3+5x-1$，则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且 $f(0)=-1<0$， $f(1)=5>0$，由闭区间上连续函数的零点定理知，方程至少有一个实根，且介于 0 、1 之间.

（2）唯一性（反证法）.

假设方程在 $(0,1)$ 内有两个不同的实根 x_1、 x_2，即 $f(x_1)=f(x_2)=0$，由罗尔定理可知，必

存在一点 $\xi \in (x_1, x_2)$，使得 $f'(\xi)=3\xi^2+5=0$，而这是不可能的，所以方程在 $(0,1)$ 内只有一个实根.

【例 8】设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 内二阶可导，且 $f(a)=f(b)=f(c)$，$a<b<c$. 试证：至少存在一点 ξ，使得 $f''(\xi)=0$.

证　显然 $f(x)$ 在 $[a,c]$、$[c,b]$ 上满足罗尔定理的条件，则对于 $f(x)$ 在 $[a,c]$ 上使用罗尔定理可知，至少存在一点 $\xi_1 \in (a,c)$，使得 $f'(\xi_1)=0$；对于 $f(x)$ 在 $[c,b]$ 上使用罗尔定理可知，至少存在一点 $\xi_2 \in (c,b)$，使得 $f'(\xi_2)=0$；同理，$f'(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上满足罗尔定理的条件，所以至少存在一点 $\xi \in (\xi_1,\xi_2) \subset (a,b)$，使得 $f''(\xi)=0$.

注：这是罗尔定理的反复应用的例题.

【例 9】证明：当 $x>0$ 时，$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$.

分析：$\ln(1+x)=\ln(1+x)-\ln(1+0)$ 相当于函数 $y=\ln(1+t)$ 在点 $(0,x)$ 处函数值的差，故用拉格朗日中值定理.

证　设 $f(t)=\ln(1+t)$，显然 $f(t)$ 在 $[0,x]$ 上连续，在 $(0,x)$ 内可导. 由拉格朗日中值定理知，至少存在一点 $\xi \in (0,x)$，使得 $f(x)-f(0)=f'(\xi)(x-0)$，即 $\ln(1+x)=\dfrac{x}{1+\xi}$，而已知 $0<\xi<x$，所以 $\dfrac{x}{1+x}<\dfrac{x}{1+\xi}<x$，得证.

【例 10】设 $a>b>0, n>1$，试证 $nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b)$.

分析：中间部分 a^n-b^n 显然是函数 $f(x)=x^n$ 在 a、b 处函数值之差，故用拉格朗日中值定理.

证　设 $f(x)=x^n$，$f(x)$ 在 $[b,a]$ 上连续，在 (b,a) 内可导. 应用拉格朗日中值定理知，至少存在一点 $\xi \in (b,a)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=\frac{a^n-b^n}{a-b}$$

即 $a^n-b^n=(a-b)n\xi^{n-1}$，而 $n>1$，即 $n-1>0$ 且 $a>b>0$，故 $b^{n-1}<\xi^{n-1}<a^{n-1}$，即 $nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b)$，得证.

【例 11】设 $a>b>0$，证明 $\dfrac{a-b}{a}<\ln\dfrac{a}{b}<\dfrac{a-b}{b}$.

证　取函数 $f(x)=\ln x$，$f(x)$ 在 $[b,a]$ 上连续，在 (b,a) 内可导. 由拉格朗日中值定理知，至少存在一点 $\xi \in (b,a)$，使 $f(a)-f(b)=f'(\xi)(a-b)$，即 $\ln a-\ln b=\dfrac{1}{\xi}(a-b)$.

又 $0<b<\xi<a$，故 $0<\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{\xi}<\dfrac{1}{b}$.

因此 $\dfrac{a-b}{a}<\dfrac{a-b}{\xi}<\dfrac{a-b}{b}$，即 $\dfrac{a-b}{a}<\ln\dfrac{a}{b}<\dfrac{a-b}{b}$.

3.2 洛必达法则

一、基本要求

（1）掌握$\dfrac{0}{0}$型与$\dfrac{\infty}{\infty}$型洛必达法则.

（2）掌握其他不定式极限的转化方法.

二、考点知识概述

1. $\dfrac{0}{0}$型洛必达法则

设函数$f(x)$、$g(x)$满足以下条件：

（1）$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$（$x_0$也可是$\infty$）；

（2）在x_0的去心邻域$\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$内$f'(x)$及$g'(x)$都存在，且$g'(x)\neq 0$；

（3）$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$存在（或为无穷大），那么$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

2. $\dfrac{\infty}{\infty}$型洛必达法则

设函数$f(x)$、$g(x)$满足以下条件：

（1）$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$（$x_0$也可是$\infty$）；

（2）$f'(x)$及$g'(x)$都存在；

（3）$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$存在（或$\infty$）.

那么$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$（或$\infty$）.

3. 其他不定式极限：（1）$0\cdot\infty$；（2）$\infty-\infty$；（3）1^∞；（4）0^0；（5）∞^0.

（1）$0\cdot\infty=\begin{cases}\dfrac{0}{\frac{1}{\infty}}=\dfrac{0}{0}\\[2ex] \dfrac{\infty}{\frac{1}{0}}=\dfrac{\infty}{\infty}\end{cases}$（应用时0和$\infty$哪个简单，就把哪个搬到分母去）；

（2）$\infty_1-\infty_2=\dfrac{1}{\frac{1}{\infty_1}}-\dfrac{1}{\frac{1}{\infty_2}}=\dfrac{\frac{1}{\infty_2}-\frac{1}{\infty_1}}{\frac{1}{\infty_1}\frac{1}{\infty_2}}=\dfrac{0}{0}$（应用时$\infty-\infty$已具有分母，直接通分）；

（3）$1^\infty=e^{\ln 1^\infty}=e^{\infty\ln 1}=e^{\infty\cdot 0}$[变成（1）的情况]；

（4）$0^0 = e^{\ln 0^0} = e^{0\ln 0} = e^{0\cdot\infty}$ [变成（1）的情况]；

（5）$\infty^0 = e^{\ln \infty^0} = e^{0\cdot\ln\infty} = e^{0\cdot\infty}$ [变成（1）的情况].

三、常用解题技巧

应用洛必达法则之前可以先采用等价替换定理.

【例 1】求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$.

解　当 $x\to 0$ 时，$e^{x^2}-1\sim x^2$，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，则

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{-\frac{1}{2}x^2}=-2$$

注：常见的等价替换，当 $x\to 0$ 时

（1）$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim\ln(1+x)\sim e^x-1$；

（2）$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$；

（3）$a^x-1\sim a^x\ln a$；

（4）$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$，$\alpha\neq 0$；

（5）$(1+\beta x)^\alpha-1\sim\alpha\beta x$.

四、典型题解

【例 2】求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{-3x}}{\sin x}$.

解　原式 $\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^{3x}-e^{-3x})'}{(\sin x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3(e^{3x}+e^{-3x})}{\cos x}=6$

【例 3】求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}$.

解　原式 $\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-2(\pi-2x)\cdot 2}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{-4\sin x}.\dfrac{\cos x}{(\pi-2x)}$

$$=-\frac{1}{4}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\pi-2x}=-\frac{1}{4}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\sin x}{-2}=-\frac{1}{8}$$

【例 4】求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\ln x}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}$.

解　原式 $\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{2}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x+3}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{2}{x}}{\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+3}}{2\sqrt{x(x+3)}}}$

$$=4\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x(x+3)}}{x(\sqrt{x}+\sqrt{x+3})}\xlongequal{\text{上下同除以}x}4\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{3}{x}}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+3}}=0$$

【例 5】求 $\lim\limits_{x\to0}5x\cot(3x)$.

解　原式 $\xlongequal{0\cdot\infty}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5x}{\tan(3x)}\overset{\frac{0}{0}}{=}5\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\dfrac{3}{\cos^2(3x)}}=\dfrac{5}{3}\lim\limits_{x\to0}\cos^2(3x)=\dfrac{5}{3}$

【例 6】求 $\lim\limits_{x\to0}x^4e^{\frac{1}{x^4}}$.

解　原式 $\xlongequal{0\cdot\infty}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\frac{1}{x^4}}}{\dfrac{1}{x^4}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\frac{1}{x^4}}\left(\dfrac{1}{x^4}\right)'}{\left(\dfrac{1}{x^4}\right)'}=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x^4}}=\infty$

【例 7】求 $\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{6}{x^2-9}-\dfrac{1}{x-3}\right)$.

解　原式 $\xlongequal{\infty-\infty}\lim\limits_{x\to3}\dfrac{6-(x+3)}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{-(x-3)}{x^2-9}\overset{\frac{0}{0}}{=}-\lim\limits_{x\to3}\dfrac{1}{2x}=-\dfrac{1}{6}$

【例 8】求 $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$.

解　原式 $\xlongequal{\infty-\infty}\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x+1-1}{\ln x+(x-1)\dfrac{1}{x}}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x\ln x}{x\ln x+(x-1)}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to1}\frac{\ln x+1}{\ln x+1+1}=\frac{1}{2}$$

【例 9】求 $\lim\limits_{x\to0^+}x^x$.

分析：类似幂指函数的问题，无论是求其导数还是求极限都可以化为 $e^{(\text{指数函数形式})}$ 与取对数两方面考虑.

解　方法一：原式 $=\lim\limits_{x\to0^+}e^{\ln x^x}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x}$，其中

$$\lim_{x\to0^+}x\ln x\xlongequal{0\cdot\infty}\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=0$$

所以原式 $=e^0=1$.

方法二：先取对数.

设 $y=x^x$，取对数 $\ln y=x\ln x$，因为

$$\lim_{x\to0^+}\ln y=\lim_{x\to0^+}x\ln x\xlongequal{0\cdot\infty}\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=0$$

所以 $\lim\limits_{x\to0^+}x^x=\lim\limits_{x\to0^+}\mathrm{e}^{\ln y}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0^+}\ln y}=\mathrm{e}^0=1$.

注：实际做题过程中选取哪一种方法均可，但请注意书写过程.

【例 10】求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{2x}\right)^x$.

解　应用第二类重要极限.

$$原式=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{a}{2x}\right)^{\frac{2x}{a}}\right]^{\frac{a}{2}}=\mathrm{e}^{\frac{a}{2}}$$

【例 11】求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin3x+2x}{\sin5x+4x}$.

解　$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin3x+2x}{\sin5x+4x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{\sin3x}{x}+2}{\frac{\sin5x}{x}+4}=\dfrac{1}{2}$

【例 12】求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}-2x}{x-\sin x}$.

解　原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}-2}{1-\cos x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\sin x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{\cos x}=2$

3.3　函数的单调性及极值

一、基本要求

（1）理解极值与驻点的概念.
（2）掌握函数单调性的判别方法.
（3）掌握函数极值的判别方法.
（4）掌握函数最值的求法.

二、考点知识概述

1．极值与驻点的定义

（1）极值的定义：函数 $y=f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内有定义，若对 $\forall x\in\mathring{U}(x_0)$，有 $f(x)<f(x_0)$，则称 $f(x_0)$ 为函数 $y=f(x)$ 的极大值；若对 $\forall x\in\mathring{U}(x_0)$，有 $f(x)>f(x_0)$，则称 $f(x_0)$ 为函数 $y=f(x)$ 的极小值.

（2）驻点的定义：函数 $y=f\left(x\right)$，若 $f'\left(x_0\right)=0$，则称 x_0 为函数的驻点（或临界点、稳定点）.

2．函数单调性的判别方法

（1）单调性的判别方法.

设函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，如果 $\forall x\in(a,b)$，$f'(x)>0$，那么函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加.

设函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，如果 $\forall x\in(a,b)$，$f'(x)<0$，那么函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少.

（2）函数单调区间的求法.

① 函数定义域；

② $f'(x)=0$ 的点；

③ $f'(x)$ 不存在的点；

④ 函数的间断点.

将满足②、③、④的点排成一列，$x_1<x_2<\cdots<x_n$，判断：

a．x_i 的左、右一阶导数变号，则 x_i 就是分界点；

b．x_i 的左、右一阶导数不变号，则 x_i 就不是分界点.

3．函数极值的判别方法

（1）第一充分条件. 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续，且在 x_0 处某去心邻域 $\overset{0}{U}(x_0,\delta)$ 内可导：

① 若 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时，$f'(x)>0$，而 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值；

② 若 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时，$f'(x)<0$，而 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值；

③ 若 $x\in\overset{0}{U}(x_0,\delta)$ 时，$f'(x)$ 的符号不变，则 $f(x)$ 在 x_0 处没有取得极值.

（2）第二充分条件. 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处具有二阶导数，且 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)\neq 0$，那么：

① 当 $f''(x_0)<0$ 时，函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值；

② 当 $f''(x_0)>0$ 时，函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值.

（3）极值点的求法.

方法一：求出①函数定义域；② $f'(x)=0$ 的点；③ $f'(x)$ 不存在的点；④函数的间断点. 满足②、③、④的点 $x_1<x_2<\cdots<x_n$，将定义域分成 $n+1$ 个区间，然后利用极值的第一充分条件.

方法二：直接利用极值的第二充分条件.

4．函数最值的求法

（1）求出 $f'(x)=0$ 的点，$f'(x)$ 不存在的点，以及函数的间断点 $x_1,x_2,\cdots,x_n$；

（2）计算 $f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_n)$ 及 $f(a)$、$f(b)$；

（3）$\max\{f(a),f(x_1),\cdots,f(x_n),f(b)\}$ 就是 $[a,b]$ 上的最大值；$\min\{f(a),f(x_1),\cdots,f(x_n),f(b)\}$ 就是 $[a,b]$ 上的最小值.

三、常用解题技巧

证明不等式

方法一：利用函数的单调性.

【例 1】证明：当 $x>0$ 时，$x>\sin x$.

证　令 $f(x)=x-\sin x$，则 $f'(x)=1-\cos x$. 当 $x>0$ 时，$f'(x)\geqslant 0$，且 $f'(x)=0$ 的点 $x=2k\pi, k\in\mathbf{Z}$ 为离散点，所以 $f(x)=x-\sin x$ 在 $[0,+\infty)$ 上为增函数，

即当 $x>0$ 时，$f(x)>f(0)=0$，于是有 $x>\sin x$.

方法二：利用函数的最值证明。

【例 2】证明 $\mathrm{e}^x\geqslant 1+x$.

证　考虑函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-x-1$，有 $f'(x)=\mathrm{e}^x-1$.

令 $f'(x)=0$，得驻点 $x=0$.

因为 $f''(x)=\mathrm{e}^x$，$f''(0)=1>0$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值. 又因为是唯一的一个极值，所以也是最小值，即 $f(0)=0$.

故 $f(x)\geqslant f(0)=0$，即 $\mathrm{e}^x\geqslant 1+x$.

四、典型题解

【例 3】证明：当 $x>0$ 时，$1+\frac{1}{2}x>\sqrt{1+x}$.

证　设 $f(x)=1+\frac{1}{2}x-\sqrt{1+x}$，则 $f(x)$ 在 x>0 时是连续的.

因为 $f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{1+x}}=\frac{\sqrt{1+x}-1}{2\sqrt{1+x}}>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内是单调增加的，从而当 $x>0$ 时 $f(x)>f(0)=0$，即

$$1+\frac{1}{2}x-\sqrt{1+x}>0\Rightarrow 1+\frac{1}{2}x>\sqrt{1+x}$$

【例 4】当 $x>0$ 时，证明：$2x-2x^2+\frac{8}{3}x^3>\ln(1+2x)$.

证　令 $f(x)=2x-2x^2+\frac{8}{3}x^3-\ln(1+2x)$，$f(0)=0$，只需证明 $f(x)>f(0)$ $(x>0)$ 即可. 因为 $f'(x)=2-4x+8x^2-\frac{2}{1+2x}$，故 $f'(0)=0$.

$f''(x)=-4+16x+\frac{4}{(1+2x)^2}$，$f''(0)=0$. 而

$$f'''(x)=16-\frac{16}{(1+2x)^3}=16\left[1-\frac{1}{(1+2x)^3}\right]>0\ （x>0）$$

所以当 $x>0$ 时，$f''(x)$ 单调上升，即 $f''(x)>f''(0)=0$（$x>0$），从而当 $x>0$ 时，$f'(x)$ 也单调上升，$f'(x)>f'(0)=0$. 因此，当 $x>0$ 时，$f(x)$ 也单调上升.

$f(x)>f(0)=0$，即 $2x-2x^2+\frac{8}{3}x^3>\ln(1+2x)$.

注：这是多次利用单调性的证明.

【例 5】试确定方程$3x^4-4x^3-6x^2+12x-20=0$有几个实根及这些根所在区间.

（1）单调区间.

设$f(x)=3x^4-4x^3-6x^2+12x-20$，显然$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续.

$f'(x)=12x^3-12x^2-12x+12=12(x-1)^2(x+1)$，当$x<-1$时，$f'(x)<0$；当$x>-1$且$x\neq1$时，$f'(x)>0$.

故$f(x)$在$(-\infty,-1)$上单调递减，在$[-1,1)\cup(1,+\infty)$上单调递增.

（2）实根情况.

$f(-1)=-31<0$，而$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.

$f(x)$在$(-\infty,-1)$及$(-1,+\infty)$分别有一个零点，即原方程有两个实根，分别在$(-\infty,-1)$、$(-1,+\infty)$内.

【例 6】求函数$y=x^3-3x+1$的单调区间及极值.

解　$x\in\mathbf{R}$，$y'=3x^2-3=3(x^2-1)=3(x+1)(x-1)$. 令$y'=0$，得$x=\pm1$.

由以上所求列表（见表 3.1）.

表 3.1

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	+	0	−	0	+
y	↑	极大值	↓	极小值	↑

单调增加区间是$(-\infty,-1]$、$[1,+\infty)$；单调减少区间是$[-1,1]$；极大值$f(-1)=3$，极小值$f(1)=-1$.

【例 7】设$f(x)=x+\dfrac{1}{x}$，求单调区间、极值.

解　$x\neq0$，$f'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}$，令$f'(x)=0$，得$x=\pm1$.

由以上所求列表（见表 3.2）

表 3.2

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$0,1$	1	$(1,+\infty)$
y'	+	0	−		−	0	+
y	↑	极大值	↓	无定义	↓	极小值	↑

单调增加区间是$(-\infty,-1]$、$[1,+\infty)$；单调减少区间是$[-1,0),(0,1]$；极大值$f(-1)=-2$，极小值$f(1)=2$.

【例 8】设$y=x^3-3x^2-9x-7$，求其单调区间、极值.

解　$x\in\mathbf{R}$，$y'=3x^2-6x-9=3(x^2-2x-3)=3(x-3)(x+1)$. 令$y'=0$，得$x=3$、$x=-1$.

由以上所求列表（见表 3.3）

表 3.3

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,3)$	3	$(3,+\infty)$
y'	+	0	−	0	+
y	↑	极大值	↓	极小值	↑

单调增加区间是 $(-\infty,-1]$、$[3,+\infty)$；单调减少区间是 $[-1,3]$；极大值 $f(-1)=-2$，极小值 $f(3)=-34$.

【例 9】求 $f(x)=x^2-4x+4\ln(x+1)$ 的极大值与极小值.

解　$f'(x)=2\left(x-2+\dfrac{2}{x+1}\right)=\dfrac{2x(x-1)}{x+1}$，$f''(x)=2\left[1-\dfrac{2}{(x+1)^2}\right]$. 令 $f'(x)=0$，得驻点 $x=0$、$x=1$. 而 $f''(0)=-2<0$，故 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处取得极大值.

$f(0)=0$，$f''(1)=1>0$，$f(x)$ 在点 $x=1$ 处取得极小值.

$f(1)=-3+4\ln 2$.

注：这是用 $f''(x_0)>0$（或 <0）来判断极值点的方法.

【例 10】现有 100m 的绳子一条，问如何围成长方形，使其面积最大？

解　设此长方形长为 x，则宽为 $\dfrac{100-2x}{2}$，从而面积为

$$s(x)=x\frac{100-2x}{2}=x(50-x),\quad 0<x<50,\quad s'(x)=50-x-x=50-2x$$

令 $s'(x)=0$，$x=25$ 为唯一驻点，且当 $x<25$ 时，$s'(x)>0$，$s(x)$ 单调增加.

当 $x>25$ 时，$s'(x)<0$，$s(x)$ 单调减少. 故当 $0<x<+\infty$时，$x=25$ 为 $s(x)$的最大值点. 实际上该最值是唯一存在的驻点，故极值为最值. 最大值 $s(25)=625$，即长、宽均为 25m 时的正方形面积最大.

3.4　曲线的凸凹性、拐点及函数作图

一、基本要求

（1）掌握函数凸凹性的定义及其判别方法.

（2）理解拐点的定义.

（3）掌握拐点的判别方法.

（4）掌握曲线的渐近线及其求法.

（5）理解函数作图.

二、考点知识概述

1．曲线的凸凹性

（1）凸凹性的定义.

设 $f(x)$ 在区间 I 上连续，如果对区间 I 上任意两点 x_1、x_2，恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

则称 $f(x)$ 在 I 上的图形是（向下）凹的.

设 $f(x)$ 在区间 I 上连续，如果对区间 I 上任意两点 x_1、x_2，恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

则称 $f(x)$ 在 I 上的图形是（向上）凸的.

（2）凸凹性的判别方法.

设 $f(x)$ 在区间 I 上连续，在 I 内具有二阶导数，且在 I 内 $f''(x)>0$，则 $f(x)$ 在 I 上的图形是凹的.

设 $f(x)$ 在区间 I 上连续，在 I 内具有二阶导数，且在 I 内 $f''(x)<0$，则 $f(x)$ 在 I 上的图形是凸的.

2．曲线的拐点

（1）拐点定义：连续曲线 $y=f(x)$ 上的凸凹分界点 $(x_0, f(x_0))$ 称为曲线的拐点.

（2）拐点的判别方法：

$y=f(x)$ 在 x_0 的一个邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内二阶可导，如果 $f''(x)=0$ 或 $f'(x_0)$ 不存在，或 $f''(x_0)$ 不存在，当 $(x_0-\delta, x_0)$ 与 $(x_0, x_0+\delta)$ 内的二阶导数变号时，点 $(x_0, f(x_0))$ 就是 $y=f(x)$ 的拐点；当两侧二阶导数不变号时，点 $(x_0, f(x_0))$ 就不是拐点.

设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 三阶可导，且 $f''(x_0)=0$ 而 $f'''(x_0)\neq 0$，那么点 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线的拐点.

（3）求拐点的步骤：

先找出①定义域；② $f'(x)$ 不存在点；③ $f''(x)=0$ 的点；④ $f''(x)$ 不存在的点. 对满足②、③、④的点 x_i，看其两侧二阶导数的符号，如两侧二阶导数符号相反，则点 $(x_i, f(x_i))$ 就是拐点；如果两侧二阶导数符号相同，则 $(x_i, f(x_i))$ 就不是拐点.

3．曲线的渐近线

（1）斜渐近线（$x\to+\infty$）：曲线 $y=f(x)$ 的定义域为 $(a,+\infty)$，若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-kx-b\right]=0$，则称 $y=kx+b$ 是 $y=f(x)$ 在 $x\to+\infty$ 时的斜渐近线.

水平渐近线：当 $k=0$ 时，称 $y=b$ 是 $y=f(x)$ 在 $x\to+\infty$ 时的水平渐近线.

（2）斜渐近线（$x\to-\infty$）：曲线 $y=f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,a)$，若 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-kx-b\right]=0$，则称 $y=kx+b$ 是 $y=f(x)$ 在 $x\to-\infty$ 时的斜渐近线.

水平渐近线：当 $k=0$ 时，称 $y=b$ 是 $y=f(x)$ 在 $x\to-\infty$ 时的水平渐近线.

（3）垂直渐近线：$y=f(x)$，当 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\infty$（或 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\infty$）时，称 $x=x_0$ 为 $y=f(x)$ 的垂直渐近线.

注：① 斜渐近线最多有 2 条，最少 0 条.

② 水平渐近线最多有 2 条，最少 0 条. 在同一方向上，水平渐近线不能与斜渐近线共存.

③ 垂直渐近线最多有无数条，如 $y=\tan x$， $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$（ $k\in\mathbf{Z}$ ）都是其垂直渐近线，最少是 0 条.

（4）渐近线的求法.

① 水平渐近线的求法.

若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a$，则 $y=a$ 就是当 $x\to+\infty$ 时， $y=f(x)$ 的水平渐近线.

若 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=b$，则 $y=b$ 就是当 $x\to-\infty$ 时， $y=f(x)$ 的水平渐近线.

② 垂直渐近线的求法.

x_0 的选取应该是 $y=f(x)$ 的定义域的有限端点，或者是其分段点.

③ 斜渐近线的求法.

如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-kx\right]=b$，则 $y=kx+b$ 就是 $x\to+\infty$ 时的斜渐近线.

如果 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=C$，且 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-Cx\right]=d$，则 $y=Cx+d$ 就是 $x\to-\infty$ 时的斜渐近线.

4．函数作图

作函数图形的步骤如下：

① 求 $y=f(x)$ 的定义域；

② 函数的奇偶性、周期性；

③ 函数的单调区间、极值；

④ 函数的凸凹区间、拐点；

⑤ 渐近线；

⑥ 一些特殊点[(极值点,极值)，拐点，与坐标轴交点]（如果要作精确一些的图，可再多列一些点）.

三、常用解题技巧

利用凸凹性的定义证明不等式.

【例 1】证明不等式

$$\frac{1}{2}\left(x^n+y^n\right)>\left(\frac{x+y}{2}\right)^n \quad（x>0,y>0,x\neq y,n>1）$$

解　因为 $f(u)=u^n$（$u>0,n>1$），$f'(u)=nu^{n-1}$，$f''(u)=n(n-1)u^{n-2}>0$，所以 $f(u)=u^n$ 是凹的.

当 $x>0,y>0,x\neq y$ 时，有

$$\frac{f(x)+f(y)}{2}>f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

即

$$\frac{1}{2}\left(x^n+y^n\right)>\left(\frac{x+y}{2}\right)^n$$

四、典型题解

【例 2】求函数 $y=2x+3x^{\frac{2}{3}}$ 的凸凹区间、拐点.

解　$x\in\mathbf{R}$，$y'=2+2x^{-\frac{1}{3}}=2\left(1+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)$，$y''=-\dfrac{2}{3}x^{-\frac{4}{3}}=-\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4}}$.

当 $x=0$ 时，y''不存在．由以上所求列表（见表 3.4）

表 3.4

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
y''	−	无定义	−
y	凸		凸

此函数的凸区间为$(-\infty,0]$、$[0,+\infty)$，无拐点.

【例 3】设 $f(x)=x^3-6x^2+3x+5$，求 $f(x)$ 的凸凹区间、拐点.

解　$x\in\mathbf{R}$，$f'(x)=3x^2-12x+3$，$f''(x)=6x-12=6(x-2)$，令 $f''(x)=0$，得 $x=2$．由以上所求列表（见表 3.5）

表 3.5

x	$(-\infty,2)$	2	$(2,+\infty)$
y''	−	0	+
y	$\cap$	拐点	$\cup$

此函数的凹区间为$[2,+\infty)$；此函数的凸区间为$(-\infty,2]$；拐点为$(2,-5)$.

3.5　曲　　率

一、基本要求

（1）理解曲率的定义.
（2）掌握曲率的公式.

二、考点知识概述

1．曲率定义

光滑曲线 s 上的一段弧 $\overset{\frown}{p_0p_1}$，其长度为$|\Delta s|$，p_0处的切线与 p_1处的切线的夹角为$\Delta\alpha$，如果 $\lim\limits_{\Delta s\to0}\left|\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$存在，那么这个极限值称为曲线 s 在 p_0处的曲率，记作 K，即 $K=\lim\limits_{\Delta s\to0}\left|\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$.

2．弧微分

设曲线$\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}$，$\alpha\leqslant t\leqslant\beta$，$\varphi(t)$ 与 $\psi(t)$ 都有连续的导数 $\varphi'(t)$ 与 $\psi'(t)$ 且 $[\varphi'(t)]^2+$

$\left[\psi'(t)\right]^2 \neq 0$，则 $\mathrm{d}s=\sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2+\left[\psi'(t)\right]^2}\mathrm{d}t$.

曲线 $\begin{cases} y=f(x) \\ x=x \end{cases}$，则 $\mathrm{d}s=\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\mathrm{d}x$.

如果曲线是由极坐标方程 $\rho=\rho(\theta)$ 表示的，则 $\mathrm{d}s=\sqrt{\left[\rho(\theta)\right]^2+\left[\rho'(\theta)\right]^2}\mathrm{d}\theta$.

3．曲率公式

对于曲线 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$，$K=\dfrac{\left|\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)\right|}{\left\{\left[\varphi'(t)\right]^2+\left[\psi'(t)\right]^2\right\}^{\frac{3}{2}}}$.

对于曲线 $\begin{cases} y=f(x) \\ x=x \end{cases}$，$K=\dfrac{|y''|}{\left(1+y'^2\right)^{3/2}}$.

4．曲率半径

称 $\dfrac{1}{K}$ 为曲线上 p_0 处的曲率半径，记作 R，即 $R=\dfrac{1}{K}$.

三、常用解题技巧

曲线一点附近的凸凹性与该点曲率圆的凸凹性相同.

测　试　题

1．填空题

（1）曲线 $y=x\mathrm{e}^{2x}$ 在区间________是单调递增的.

（2）曲线 $y=4\ln x-x^2$ 在区间________是单调递减的.

（3）$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\mathrm{e}^{-x}=$________.

（4）$\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}=$________.

（5）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{3x}-\mathrm{e}^{-3x}}{\sin x}=$________.

（6）$y=x^3-3x^2+6x-2$ 在 $[-1,1]$ 上的最大值是________.

（7）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}=$________.

（8）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\operatorname{arccot} x}=$________.

2．选择题

（1）函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内可导，则在 (a,b) 内 $f'(x)>0$ 是函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调增加的（　　）.

A．充分必要条件　B．充分但非必要条件

C．必要但非充分条件　D．无关条件

（2）函数 $y=x^3-3x^2+6x-2$ 在 $x=1$ 处有（　　）.

A．极小值　B．极大值　C．最大值　D．以上都不对

（3）$f'(x_0)=0$ 是函数在点 $x=x_0$ 处取得极值的（　　）.

A．必要条件　B．充分条件　C．充要条件　D．无关条件

（4）$y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得极值，则必有（　　）.

A．$f''(x_0)<0$　B．$f''(x_0)>0$

C．$f''(x_0)=0$　D．$f'(x_0)=0$ 或 $f'(x_0)$ 不存在

（5）$f''(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f''(x)}{x}=1$，那么（　　）.

A．$x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点　B．$x=0$ 是极大值点

C．$(0,f(0))$ 是拐点　D．不能确定

（6）设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续，且 $f(0)=0$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$，则在 $x=0$ 处 $f(x)$（　　）.

A．不可导　B．可导且 $f'(0)=0$

C．取得极大值　D．取得极小值

（7）下列函数在 $[-1,1]$ 上满足罗尔定理条件的是（　　）.

A．e^x　B．$\ln|x|$　C.$1-x^2$　D.$\dfrac{1}{1-x^2}$

（8）当 $x>0$ 时，曲线 $y=x\sin\dfrac{1}{x}$（　　）.

A．仅有水平渐近线　B．仅有垂直渐近线

C．既有水平渐近线，又有垂直渐近线　D．既无水平渐近线，又无垂直渐近线

3．计算题

（1）求函数 $y=x^3-3x+2$ 的单调区间和极值.

（2）求曲线 $y=x^3-5x^2+3x+5$ 的凸凹区间及拐点.

（3）求函数 $f(x)=\ln x-x$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最值.

（4）欲做一个容积为 $300\mathrm{m}^3$ 的无盖圆柱形蓄水池，已知池底单位面积造价为周围单位面积造价的 2 倍，问蓄水池的尺寸应怎样设计才能使总造价最低.

（5）设有一长 8cm，宽 5cm 矩形铁片，在每个角上剪去同样大小的正方形，问剪去正方形的边长多大，才能使剩下的铁皮折起来做成的开口盒子容积最大.

4．证明题

证明下列不等式.

（1）当 $x>0$ 时，$\ln(1+x)>\dfrac{\arctan x}{1+x}$ 成立.

（2）当 $x>1$ 时，$x>1+\ln x$.

（3）证明 $\mathrm{e}^x\geqslant 1+x$.

（4）当 $x>1$ 时，$\mathrm{e}^x>\mathrm{e}x$.

第 4 章　不 定 积 分

4.1　不定积分的概念与性质

一、基本要求

（1）理解不定积分的定义.
（2）掌握不定积分的性质.
（3）掌握不定积分的基本公式.

二、考点知识概述

1．不定积分的定义

（1）原函数：如果在区间 H 上，可导函数 $F(x)$ 的导函数为 $f(x)$，则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在 H 上的一个原函数.

（2）不定积分：在区间 H 上，函数 $f(x)$ 的全体原函数称为 $f(x)$ 在区间 H 上的不定积分，记作 $\int f(x)\mathrm{d}x$，其中 $\int$ 称为积分号，$f(x)$ 称为被积函数，$f(x)\mathrm{d}x$ 称为被积表达式，x 称为积分变量.

若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$.

（3）积分曲线：函数 $f(x)$ 的原函数的图形称为 $f(x)$ 的积分曲线.

2．不定积分的性质

（1）$\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]' = f(x)$.

（2）设 $f(x)$ 及 $g(x)$ 的原函数都存在，则

$$\int\left[f(x)\pm g(x)\right]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x$$

（3）设 $f(x)$ 的原函数存在，k 为非零常数，则

$$\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x$$

（4）$\int F'(x)\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}\left[F(x)\right] = F(x)+C$.

3．不定积分的基本公式

（1）$\int k\mathrm{d}x = kx + C$.

（2）$\int x^{\mu}\mathrm{d}x = \dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+C$　（$\mu \neq -1$）.

（3）$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C$.

（4）$\int a^x\mathrm{d}x=\frac{a^x}{\ln a}+C$.

（5）$\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C$.

（6）$\int \sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C$.

（7）$\int \cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$.

（8）$\int \tan x\mathrm{d}x=-\ln|\cos x|+C$.

（9）$\int \cot x\mathrm{d}x=\ln|\sin x|+C$.

（10）$\int \sec x\mathrm{d}x=\ln|\sec x+\tan x|+C$.

（11）$\int \csc x\mathrm{d}x=\ln|\csc x-\cot x|+C$.

（12）$\int \sec^2 x\mathrm{d}x=\tan x+C$.

（13）$\int \csc^2 x\mathrm{d}x=-\cot x+C$.

（14）$\int \sec x\tan x\mathrm{d}x=\sec x+C$.

（15）$\int \csc x\cot x\mathrm{d}x=-\csc x+C$.

（16）$\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x+C$.

（17）$\int \frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$.

（18）$\int \frac{1}{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C$.

（19）$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\arcsin x+C$.

（20）$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=\arcsin\frac{x}{a}+C$.

（21）$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$.

（22）$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C$.

三、常用解题技巧

利用积分与导数之间的关系，即$\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]'=f(x)$，求函数的表达式.

【例 1】 $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\ln\cos 3x$，求 $f(x)$ 的表达式.

解　对$\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\ln\cos 3x$ 两边求导，有 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\ln\cos 3x\right)'$，所以 $f(x)=-\tan 3x$.

四、典型题解

【例2】求 $\int x\sqrt{x}\mathrm{d}x$.

解 $\int x\sqrt{x}\mathrm{d}x=\int x^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\frac{3}{2}+1}x^{\frac{3}{2}+1}+C=\dfrac{2}{5}x^{\frac{2}{5}}+C$

【例3】求 $\int(\mathrm{e}^x+\sin x)\mathrm{d}x$.

解 $\int(\mathrm{e}^x+\sin x)\mathrm{d}x=\int\mathrm{e}^x\mathrm{d}x+\int\sin x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x-\cos x+C$

【例4】求 $\int\tan^2 x\mathrm{d}x$.

解 $\int\tan^2 x\mathrm{d}x=\int(\sec^2 x-1)\mathrm{d}x=\int\sec^2 x\mathrm{d}x-\int\mathrm{d}x=\tan x-x+C$

【例5】求 $\int\dfrac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

解 $\int\dfrac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int\left(1-\dfrac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x=\int\mathrm{d}x-\int\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=x-\arctan x+C$

注：上述例题是利用不定积分性质（1）结合不定积分的基本公式来计算不定积分的.

【例6】求 $\int 4\sin^2\dfrac{x}{2}\mathrm{d}x$.

解
$$\int 4\sin^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x=4\int\frac{1-\cos x}{2}\mathrm{d}x=2\int(1-\cos x)\mathrm{d}x$$
$$=2\int\mathrm{d}x-2\int\cos x\mathrm{d}x=2x-2\sin x+C$$

【例7】求 $\int\dfrac{2\cdot 3^x-5\cdot 2^x}{3^x}\mathrm{d}x$.

解
$$\int\frac{2\cdot 3^x-5\cdot 2^x}{3^x}\mathrm{d}x=\int\left[2-5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x\right]\mathrm{d}x$$
$$=2\int\mathrm{d}x-5\int\left(\frac{2}{3}\right)^x\mathrm{d}x=2x-\frac{5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\ln\frac{2}{3}}+C$$
$$=2x-\frac{5}{\ln 2-\ln 3}\left(\frac{2}{3}\right)^x+C$$

【例8】求 $\int(2x-1)^2\mathrm{d}x$.

解
$$\int(2x-1)^2\mathrm{d}x=\int(4x^2-4x+1)\mathrm{d}x=4\int x^2\mathrm{d}x-4\int x\mathrm{d}x+\int\mathrm{d}x$$
$$=\frac{4}{3}x^3-2x^2+x+C$$

【例9】求 $\int\left(\dfrac{4}{\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{2}{x}\right)\mathrm{d}x$.

解 $\int\left(\dfrac{4}{\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{2}{x}\right)\mathrm{d}x=4\int\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x-2\int\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=4\arcsin x-2\ln|x|+C$

4.2　第一换元法

一、基本要求

（1）掌握不定积分第一换元法的原理.

（2）掌握三种常见函数的不定积分的求法.

二、考点知识概述

1．第一换元法原理（实质：公式法，又称为凑微分法）

如果$\int f(u)\mathrm{d}u=F(u)+C$，$u=\varphi(x)$可导，则$\int f\left[\varphi(x)\right]\varphi'(x)\mathrm{d}x=F\left[\varphi(x)\right]+C$.

注：*在应用时主要是凑系数、常数，或凑函数.*

2．三种常见函数的不定积分的求法

（1）被积函数是三角函数的几次方.

正弦与余弦的做法基本一样，只需记住：奇数次方往微分号里送一个$\sin x$或$\cos x$，变为$-\cos x$或$\sin x$。偶数次方，令$\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$或$\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$即可.

正切与余切的做法基本一样，只需记住：将其中的一个$\tan^2 x$化成$\sec^2 x-1$或$\cot^2 x=\csc^2 x-1$，其余的一律不变.

（2）$\int\dfrac{常数}{二次}\mathrm{d}x$或$\int\dfrac{常数}{\sqrt{二次}}\mathrm{d}x$，方法是配方.

（3）$\int\dfrac{一次}{二次}\mathrm{d}x$或$\int\dfrac{一次}{\sqrt{二次}}\mathrm{d}x$，先将分子配成分母的导数，然后再配方.

3．常见的凑微分公式

（1）$k\mathrm{d}x=\mathrm{d}(kx+C)$.

注：*下面公式右边都不加常数C.*

（2）$x^{\mu}\mathrm{d}x=\mathrm{d}\dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1}$　（$\mu\neq-1$）.

（3）$\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}\ln|x|$.

（4）$a^x\mathrm{d}x=\mathrm{d}\dfrac{a^x}{\ln a}$.

（5）$\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{d}\mathrm{e}^x$.

（6）$\mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x=\mathrm{d}\dfrac{\mathrm{e}^{ax}}{a}$.

（7）$\sin x\mathrm{d}x=\mathrm{d}(-\cos x)$.

（8）$\cos x\mathrm{d}x=\mathrm{d}\sin x$.

（9）$\sin(ax+b)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\mathrm{d}\left[-\cos(ax+b)\right]$.

（10）$\cos(ax+b)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\mathrm{d}\sin(ax+b)$.

（11）$\sec^2 x\mathrm{d}x=\mathrm{d}\tan x$.

（12）$\csc^2 x\mathrm{d}x=\mathrm{d}(-\cot x)$.

（13）$\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\mathrm{d}\arctan x$.

（14）$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\mathrm{d}\arcsin x$.

注：最常见的三种是 $\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}\ln|x|$（绝对值有时根据被积函数的形式可以去掉），$\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\mathrm{d}\left(-\frac{1}{x}\right)$，$\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\mathrm{d}2\sqrt{x}$.

三、常用解题技巧

1．利用三角函数的积化和差

$$\cos x\cos y=\frac{1}{2}\left[\cos(x-y)+\cos(x+y)\right]$$

$$\sin x\sin y=\frac{1}{2}\left[\cos(x-y)-\cos(x+y)\right]$$

$$\sin x\cos y=\frac{1}{2}\left[\sin(x-y)+\sin(x+y)\right]$$

2．利用降幂扩角

$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=1-2\sin^2 x=2\cos^2 x-1$$

3．加一项，减一项，乘一项，除一项

四、典型题解

1．形如 $\int f(ax+b)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int f(ax+b)\mathrm{d}(ax+b)=\frac{1}{a}F(ax+b)+C$

【例 1】 求 $\int\sin(2x-1)\mathrm{d}x$.

解　$\int\sin(2x-1)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\sin(2x-1)(2x-1)'\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\int\sin(2x-1)\mathrm{d}(2x-1)=-\frac{1}{2}\cos(2x-1)+C$$

【例 2】 求 $\int\frac{1}{\sqrt{1-16x^2}}\mathrm{d}x$.

解　$\int\frac{1}{\sqrt{1-16x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\sqrt{1-(4x)^2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int\frac{1}{\sqrt{1-(4x)^2}}\mathrm{d}(4x)=\frac{1}{4}\arcsin(4x)+C$

2．形如 $\int f(x^2)x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int f(x^2)(x^2)'\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int f(x^2)\mathrm{d}(x^2)=\frac{1}{2}F(x^2)+C$

【例 3】求 $\int x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$.

解　$\int x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{-x^2}\left(-x^2\right)'\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}\left(-x^2\right)=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}+C$

【例 4】求 $\int \frac{3x}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

解
$$\int \frac{3x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\int \frac{1}{1+x^2}(2x)\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}\left(x^2+1\right)$$
$$=\frac{3}{2}\ln\left|x^2+1\right|+C=\frac{3}{2}\ln(x^2+1)+C$$

3．形如 $\int f(\ln x)\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\int f(\ln x)\mathrm{d}(\ln x)=F(\ln x)+C$

【例 5】求 $\int \frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$.

解　$\int \frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{\ln x}\mathrm{d}(\ln x)=\ln\ln x+C$

【例 6】求 $\int \frac{\ln(x+1)}{x+1}\mathrm{d}x$.

解
$$\int \frac{\ln(x+1)}{x+1}\mathrm{d}x=\int \ln(x+1)\left[\ln(x+1)\right]'\mathrm{d}(x+1)$$
$$=\int \ln(x+1)\mathrm{d}\left[\ln(x+1)\right]=\frac{1}{2}[\ln(x+1)]^2+C$$

4．形如 $\int f(\sqrt{x})\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\int f(\sqrt{x})(\sqrt{x})'\mathrm{d}x=2\int f(\sqrt{x})\mathrm{d}(\sqrt{x})=2F(\sqrt{x})+C$

【例 7】求 $\int \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

解　$\int \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}(\sqrt{x})=2\mathrm{e}^{\sqrt{x}}+C$

【例 8】求 $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x$.

解　$\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{1+x}\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\int \frac{1}{1+x}\mathrm{d}(\sqrt{x})=2\arctan(\sqrt{x})+C$

5．形如 $\int f(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int f(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)=F(\mathrm{e}^x)+C$

【例 9】求 $\int \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x$.

解　$\int \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{1+(\mathrm{e}^x)^2}\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)=\arctan\mathrm{e}^x+C$

【例 10】求 $\int \frac{1}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x$.

解　$\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx = \int \frac{e^x}{(e^x)^2 + 1} dx = \int \frac{1}{(e^x)^2 + 1} d(e^x) = \arctan(e^x) + C$

6．形如 $\int f(\sin x) \cdot \cos x dx = \int f(\sin x) d(\sin x) = F(\sin x) + C$、

$$\int f(\cos x) \cdot \sin x dx = -\int f(\cos x) \quad d(\cos x) = -F(\cos x) + C\text{、}$$

$$\int f(\tan x) \cdot \sec^2 x dx = \int f(\tan x) d(\tan x) = F(\tan x) + C$$

【例 11】求 $\int \tan x dx$.

解　$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{1}{\cos x} \sin x dx = -\int \frac{1}{\cos x} d(\cos x) = -\ln|\cos x| + C$

【例 12】求 $\int \cos^5 x \cdot \sin^2 x dx$.

解　$\int \cos^5 x \cdot \sin^2 x dx = \int \cos^4 x \cdot \sin^2 x \cdot \cos x dx$

$$= \int (1 - \sin^2 x)^2 \cdot \sin^2 x d(\sin x) = \int \sin^2 x \cdot (1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x) d(\sin x)$$

$$= \int \sin^2 x d(\sin x) - 2\int \sin^4 x d(\sin x) + \int \sin^6 x d(\sin x)$$

$$= \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{1}{7}\sin^7 x + C$$

【例 13】求 $\int \tan^3 x \cdot \sec x dx$.

解　$\int \tan^3 x \cdot \sec x dx = \int \tan^2 x \cdot (\sec x \tan x) dx = \int \tan^2 x d(\sec x)$

$$= \int (\sec^2 x - 1) d(\sec x) = \int \sec^2 x d(\sec x) - \int d(\sec x)$$

$$= \frac{1}{3}\sec^3 x - \sec x + C$$

4.3　第二换元法

一、基本要求

（1）掌握不定积分的第二换元法的基本原理.

（2）掌握常用的变量替换.

二、考点知识概述

1．不定积分的第二换元法的原理

设 $x = \varphi(t)$ 是单调的可导函数，并且 $\varphi'(t) \neq 0$，又设 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 具有原函数，则有换元公式

$$\int f(x) dx = \left\{ \int f[\varphi(t)]\varphi'(t) dt \right\} \Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}$$

式中，$\varphi^{-1}(x)$ 是 $x = \varphi(t)$ 的反函数.

注：第二换元法的实质就是将处理不了或不好处理的部分进行变量替换.

2. 常见的变量替换

（1）可将被积函数中的根式设成t，即$\sqrt{W}=t$，从中解出x，并带回不定积分中.

（2）$\sqrt{a^2-x^2}$，$|x|\leqslant a$（$a>0$）.

设$x=a\sin t$，$-\dfrac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant\dfrac{\pi}{2}$，则$\mathrm{d}x=a\cos t\mathrm{d}t$，$\sqrt{a^2-x^2}=a\cos t$.

（3）$\sqrt{x^2-a^2}$，$|x|\geqslant a$（$a>0$）.

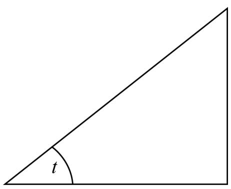

图 4.1

设$x=a\sec t$，t在第一象限或第三象限，则$\mathrm{d}x=a\sec t\tan t\,\mathrm{d}t$，$\sqrt{x^2-a^2}=a\tan t$.

（4）$\sqrt{x^2+a^2}$，$x\in\mathbf{R}$.

设$x=a\tan t$，$-\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{2}$，则$\mathrm{d}x=a\sec^2 t\,\mathrm{d}t$，$\sqrt{x^2+a^2}=a\sec t$.

注：后三种变量替换，求出原函数，将变量x带回时，可利用直角三角形（如图 4.1 所示）求t的各个三角函数值.

三、常用解题技巧

（1）第二换元法的实质：将被积函数中处理不了或不好处理的部分进行变量替换.

【例 1】求$I=\int\left[\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right]^2\mathrm{d}x$.

解 设$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=t$，即$\sqrt{1+x^2}+x=\mathrm{e}^t$，而

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=\sqrt{x^2+1}-x=\mathrm{e}^{-t}$$

从而$x=\dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t}\right)$，则$\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}\right)\mathrm{d}t$，代入得

$$\begin{aligned}
I&=\frac{1}{2}\int t^2\left(\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}\right)\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{2}\int t^2\,\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t}\right)=\frac{1}{2}\left[t^2\left(\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t}\right)-\int\left(\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t}\right)\mathrm{d}(t^2)\right]\\
&=\frac{1}{2}t^2\left(\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t}\right)-\int t\left(\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t}\right)\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{2}t^2\left(\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t}\right)-\int t\,\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}\right)\\
&=\frac{1}{2}t^2\left(\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t}\right)-t\left(\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}\right)+\int\left(\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}\right)\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{2}t^2\left(\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t}\right)-t\left(\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}\right)+\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t}+C\\
&=x\left[\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right]^2-2\sqrt{1+x^2}\,\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+2x+C
\end{aligned}$$

（2）观察分子、分母之间的关系.

【例 2】求 $\int \frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$.

解　分子 $\cos x-\sin x$ 恰好为分母 $\sin x+\cos x$ 的导数，因此

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}(\sin x+\cos x)\\ &= \ln|\sin x+\cos x|+C\end{aligned}$$

四、典型题解

【例 3】求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{1-x^2}}$.

解　令 $x=\sin t$，$-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$，则 $\mathrm{d}x=\cos t\mathrm{d}t$，有

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{1-x^2}} &= \int \frac{\cos t\mathrm{d}t}{1+\cos t} = \int\left(1-\frac{1}{1+\cos t}\right)\mathrm{d}t = t-\int \frac{1}{1+\cos t}\mathrm{d}t\\ &= t-\int \frac{1}{2\cos^2\frac{t}{2}}\mathrm{d}t = t-\tan\frac{t}{2}+C\end{aligned}$$

由于 $t=\arcsin x$，故原式$=\arcsin x-\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}+C$.

【例 4】求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$.

解　令 $x=\tan t$，$-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$，则 $\mathrm{d}x=\sec^2 t\mathrm{d}t$，有

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2+1)^3}} = \int \frac{\sec^2 t\mathrm{d}t}{\sec^3 t} = \int \cos t\mathrm{d}t = \sin t+C$$

由于 $\tan t=x$，故原式$=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+C$.

4.4　分部积分法

一、基本要求

掌握分部积分法的原理.

二、考点知识概述

分部积分法的原理：

设 $u=u(x)$、$v=v(x)$ 具有连续导数，$\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u$.

三、常用解题技巧

1．$\int$幂×对数 $\mathrm{d}x$

将幂函数送进微分号内配平.

2．$\int$幂×反三角 $\mathrm{d}x$

将幂函数送进微分号内配平.

3．$\int$幂×指数 $\mathrm{d}x$

将指数函数送进微分号内配平.

4．$\int$幂×三角 $\mathrm{d}x$

将三角函数送进微分号内配平.

5．$\int$三角×指数 $\mathrm{d}x$

将指数函数送进微分号内配平（当然也可送三角函数）.

注：（1）幂函数与对数函数、反三角函数、指数函数、三角函数都可以搭配，而最后一种函数只有三角函数与指数函数可以搭配，其余的均不能用初等函数表示.

（2）在求不定积分的过程中，如果出现将不定积分移项、合并的情况，则另一边要加上一个常数 C.

四、典型题解

1．形如$\int$多项式$\times\sin x\mathrm{d}x$或$\int$多项式$\times\cos x\mathrm{d}x$

【例 1】求$\int x\cos\frac{x}{2}\mathrm{d}x$.

解
$$\int x\cos\frac{x}{2}\mathrm{d}x=2\int x\mathrm{d}(\sin\frac{x}{2})=2\left(x\sin\frac{x}{2}-\int\sin\frac{x}{2}\mathrm{d}x\right)$$
$$=2x\sin\frac{x}{2}+4\cos\frac{x}{2}+C$$

【例 2】求$\int 4x^2\sin x\cos x\mathrm{d}x$.

解
$$\int 4x^2\sin x\cos x\mathrm{d}x=\int 2x^2\sin 2x\mathrm{d}x=-\int x^2\mathrm{d}(\cos 2x)$$
$$=-[x^2\cos 2x-\int\cos 2x\mathrm{d}(x^2)]=-x^2\cos 2x+\int x\cos 2x\mathrm{d}(2x)$$
$$=-x^2\cos 2x+\int x\mathrm{d}(\sin 2x)=-x^2\cos 2x+x\sin 2x-\int\sin 2x\mathrm{d}x$$
$$=-x^2\cos 2x+x\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x+C$$

注：此类型在计算不定积分时通常是将原式中的$\sin x\mathrm{d}x$化为$-\mathrm{d}(\cos x)$的形式或将$\cos x\mathrm{d}x$化为$\mathrm{d}(\sin x)$再利用分部积分公式计算.

2．形如$\int$多项式$\times e^{bx}dx$

【例 3】求$\int xe^x dx$.

解　$\int xe^x dx = \int xd(e^x) = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$

【例 4】求$\int (x^2+2x+1)e^x dx$.

解　$$\begin{aligned}\int (x^2+2x+1)e^x dx &= \int (x+1)^2 e^x dx = \int (x+1)^2 d(e^x)\\ &= (x+1)^2 e^x - 2\int e^x (x+1)dx\\ &= (x+1)^2 e^x - 2\int (x+1)d(e^x)\\ &= (x+1)^2 e^x - 2(x+1)e^x + 2e^x + C\\ &= (x^2+1)e^x + C\end{aligned}$$

注：此类型中通常是将$e^{bx}dx$化为$\dfrac{1}{b}d(e^{bx})$再利用分部积分计算.

3．形如$\int x^k \ln^m x dx$，（$m=1,2,\cdots$）

【例 5】求$\int x^2 \ln x dx$.

解　$$\begin{aligned}\int x^2 \ln x dx &= \frac{1}{3}\int \ln x d(x^3) = \frac{1}{3}[x^3 \ln x - \int x^3 d(\ln x)]\\ &= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{3}\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + C\end{aligned}$$

【例 6】求$\int \frac{\ln^2 x}{x^5} dx$.

解　$$\begin{aligned}\int \frac{\ln^2 x}{x^5}dx &= -\frac{1}{4}\int \ln^2 x d(x^{-4}) = -\frac{\ln^2 x}{4x^4} + \frac{1}{2}\int \ln x \cdot x^{-5} dx\\ &= -\frac{\ln^2 x}{4x^4} - \frac{1}{8}\int \ln x d(x^{-4}) = -\frac{\ln^2 x}{4x^4} - \frac{\ln x}{8x^4} + \frac{1}{8}\int x^{-5}dx\\ &= -\frac{8\ln^2 x + 4\ln x + 1}{32x^4} + C\end{aligned}$$

注：此类型中一般是将$x^k dx$化为$\dfrac{1}{k+1}d(x^{k+1})$再利用分部积分计算.

【例 7】求$\int x^{-1}\ln^m x dx$，（$m \neq -1$）.

解　$\int x^{-1}\ln^m x dx = \int \ln^m x d(\ln x) = \dfrac{\ln^{m+1} x}{m+1} + C$

【例 8】求$\int x^{-1}\ln^{-1} x dx$.

解　$\int x^{-1}\ln^{-1} x dx = \int \ln^{-1} x d(\ln x) = \ln|\ln x| + C$

4．形如$\int x^k \times$反三角函数dx

【例 9】求$\int x^2 \arctan x dx$.

解 $\int x^2\arctan x\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int\arctan x\mathrm{d}(x^3)$

$$=\frac{1}{3}[x^3\arctan x-\int x^3\mathrm{d}(\arctan x)]$$

$$=\frac{1}{3}x^3\arctan x-\frac{1}{3}\int\frac{x^3}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3\arctan x-\frac{1}{3}\int\left(x-\frac{x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{3}x^3\arctan x-\frac{1}{3}\int x\mathrm{d}x+\frac{1}{3}\int\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{3}x^3\arctan x-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{6}\int\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}(1+x^2)$$

$$=\frac{1}{3}x^3\arctan x-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{6}\ln(1+x^2)+C$$

【例 10】求 $\int(\arcsin x)^2\mathrm{d}x$.

解 $\int(\arcsin x)^2\mathrm{d}x=x(\arcsin x)^2-2\int x(\arcsin x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

$$=x(\arcsin x)^2+2\int\arcsin x\mathrm{d}(\sqrt{1-x^2})$$

$$=x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2\int\mathrm{d}x$$

$$=x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x+C$$

注：此类型中将 $x^k\mathrm{d}x$ 化为 $\frac{1}{k+1}\mathrm{d}(x^{k+1})$ 结合分部积分法公式计算不定积分.

5. 形如 $\int\cos bx\cdot\mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x$ 或 $\int\sin bx\cdot\mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x$

【例 11】求 $\int\cos x\cdot\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

解 $\int\cos x\cdot\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\int\cos x\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)$

$$=\cos x\mathrm{e}^x+\int\sin x\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)$$

$$=\cos x\mathrm{e}^x+\sin x\mathrm{e}^x-\int\mathrm{e}^x\cos x\mathrm{d}x$$

移项整理得 $\int\mathrm{e}^x\cos x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(\cos x+\sin x)\mathrm{e}^x+C$.

【例 12】求 $\int\sin^2x\cdot\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

解 $\int\sin^2x\cdot\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\int\frac{1-\cos 2x}{2}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\mathrm{e}^x\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int\mathrm{e}^x\cos 2x\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{e}^x-\frac{1}{2}\int\cos 2x\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^x-\frac{1}{2}\mathrm{e}^x\cos 2x-\int\mathrm{e}^x\sin 2x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{e}^x-\frac{1}{2}\mathrm{e}^x\cos 2x-\int\sin 2x\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{e}^x-\frac{1}{2}\mathrm{e}^x\cos 2x-\mathrm{e}^x\sin 2x+2\int\mathrm{e}^x\cos 2x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{e}^x-\frac{1}{2}\mathrm{e}^x\cos 2x-\mathrm{e}^x\sin 2x+2\int\mathrm{e}^x(1-2\sin^2x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}e^x-\frac{1}{2}e^x\cos 2x-e^x\sin 2x+2\int e^x dx-4\int e^x\sin^2 x dx$$

移项整理得 $\int \sin^2 x\cdot e^x dx=\frac{1}{2}e^x-\frac{1}{10}e^x\cos 2x-\frac{1}{5}e^x\sin 2x+C$.

4.5　有理函数与三角函数有理式的积分

一、基本要求

掌握真分式的分解原理.

二、考点知识概述

1．真分式与假分式

$$R(x)=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}，（a_0\neq 0,b_0\neq 0）$$

当 $n<m$ 时，称为有理真分式；当 $n\geqslant m$ 时，称为有理假分式.

注：有理假分式都可以通过除法化成一个多项式与有理真分式之和.

2．多项式分解

任何实系数的 n 次多项式 $f(x)$ 一定能分解为一次与二次因子的乘积，这些因子的系数都是实数，即

$$f(x)=a_0(x-a)^\alpha(x-b)^\beta\cdots(x^2+px+q)^\lambda(x^2+rx+s)^\mu\cdots$$

式中，$\alpha,\beta,\cdots\lambda,\mu,\cdots$ 都是正整数，其系数都是实数.

二次式的系数满足 $p^2-4q<0$，$r^2-4s<0$，…

3．真分式分解

$$真分式\ R(x)=\frac{g(x)}{(x-a)^\alpha(x-b)^\beta(x^2+px+q)^m}$$

式中，$g(x)$ 是一个多项式，其最高次的指数低于分母最高次的指数，则

$$R(x)=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}+\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\cdots+\frac{B_\beta}{(x-b)^\beta}$$
$$+\frac{p_1x+q_1}{x^2+px+q}+\frac{p_2x+q_2}{(x^2+px+q)^2}+\cdots+\frac{p_mx+q_m}{(x^2+px+q)^m}$$

式中，$A_1,A_2,\cdots,A_\alpha$、$B_1,B_2,\cdots,B_\beta$、$p_1,q_1,\cdots,p_m$、q_m 都是实常数.

三、典型题解

1．有理函数积分

【例 1】求 $\int\frac{2x-1}{x^2-x-6}dx$.

解　$\int \frac{2x-1}{x^2-x-6}dx = \int \frac{2x-1}{(x-3)(x+2)}dx = \int\left(\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x+2}\right)dx$

$$= \int \frac{1}{x-3}dx + \int \frac{1}{x+2}dx = \int \frac{1}{x-3}d(x-3) + \int \frac{1}{x+2}d(x+2)$$

$$= \ln|x-3| + \ln|x+2| + C$$

【例 2】求$\int \frac{1}{(x^2+1)(x^2+x+1)}dx$.

解　$\int \frac{1}{(x^2+1)(x^2+x+1)}dx$

$$= \int\left(\frac{-x}{x^2+1}+\frac{x+1}{x^2+x+1}\right)dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}d(x^2+1) + \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}dx$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}d(x^2+x+1) + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}d\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$

2．三角正余弦的四则运算函数积分

【例 3】求$\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}$.

解　设$u = \tan\frac{x}{2}$，则

$$\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5} = \int \frac{du}{3u^2+2u+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{1}{1+\left(\frac{3u+1}{\sqrt{5}}\right)^2}d\left(\frac{3u+1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{3u+1}{\sqrt{5}} + C$$

由于$u = \tan\frac{x}{2}$，原式$= \frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{3\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}} + C$.

注： 当被积函数由三角正余弦间的四则运算表示时，通常利用$\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$、$\cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$，令$u = \tan\frac{x}{2}$表示$\sin x$和$\cos x$的换元.

测 试 题 A

1. 填空题

（1）$\int \sqrt{x+1}\mathrm{d}x=$________________.

（2）$\int \frac{1}{\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x=$________________.

（3）$\int \sqrt{2x-2}\mathrm{d}x=$________________.

（4）$\int \cos 2x\mathrm{d}x=$ ________________.

（5）$\int \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=$________________.

（6）$\int \sin^3 x\mathrm{d}x=$____________________.

（7）$\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x=$________________.

（8）$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=$____________________.

（9）$\int x\ln(1+x^2)\mathrm{d}x=$____________________.

（10）设 $f(x)$ 为连续函数，则 $\int f^2(x)\mathrm{d}f(x)=$____________________.

2. 选择题

（1）$\int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\mathrm{d}x=$（　　）.

A．$\arcsin x$　　B．$\arcsin x+C$　　C．$\frac{1}{2}\arcsin 2x$　　D．$\frac{1}{2}\arcsin 2x+C$

（2）$\int a^x\mathrm{d}x=$（　　）.

A．a^x　　B．a^x+C　　C．$\frac{a^x}{\ln a}+C$　　D．$a^x\ln a+C$

（3）$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x=$（　　）.

A．$\frac{1}{x^2}$　　B．$\ln|x|$　　C．$\frac{1}{x^2}+C$　　D．$\ln|x|+C$

（4）设 $f(x)=\mathrm{e}^{-x}$，则 $\int \frac{f'(\ln x)}{x}\mathrm{d}x=$（　　）.

A．$-x+C$　　B．$\frac{1}{x}+C$　　C．e^x+C　　D．$\mathrm{e}^{-x}+C$

（5）$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=$（　　）.

A．$\arcsin x$　　B．$\arccos x$　　C．$\arcsin x+C$　　D．$\arccos x+C$

（6）$\int \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=$（　　）.

A. $\frac{1}{x}+C$　　B. $\frac{1}{x^2}$　　C. $-\frac{1}{x}+C$　　D. $\frac{1}{x}$

（7）$\int \frac{1}{\sqrt{16-x^2}}\mathrm{d}x=$（　　）.

A. $\arcsin x$　　B. $\arcsin x+C$　　C. $\arcsin\frac{x}{4}$　　D. $\arcsin\frac{x}{4}+C$

（8）$\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=$（　　）.

A. $\arctan x$　　B. $\mathrm{arccot} x$　　C. $\arctan x+C$　　D. $\mathrm{arccot} x+C$

（9）$\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x=$（　　）.

A. $\frac{1}{x^2}$　　B. $\sqrt{x}$　　C. $\frac{1}{x^2}+C$　　D. $\sqrt{x}+C$

（10）下列各式中成立的是（　　）.

A. $\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)$　　B. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)\mathrm{d}x$

C. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)+C$　　D. $\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)\mathrm{d}x$

（11）已知 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $x\in(-\infty,+\infty)$ 有定义且可导，如果 $f'(x)=g'(x)$，则下列各式中一定成立的是（　　）.

A. $f(x)=g(x)$　　B. $f(x)=g(x)+1$

C. $\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]'=\left[\int g(x)\mathrm{d}x\right]'$　　D. $\int f'(x)\mathrm{d}x=\int g'(x)\mathrm{d}x$

（12）$\sin 2x$ 的一个原函数是（　　）.

A. $2\cos 2x$　　B. $\cos 2x$　　C. $-\cos^2 x$　　D. $\frac{1}{2}\sin 2x$

（13）设 $f(x)$ 是可导函数，则$\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]'$为（　　）.

A. $f(x)$　　B. $f(x)+C$　　C. $f'(x)$　　D. $f'(x)+C$

（14）若$\int f(x)\mathrm{d}x=x^2\mathrm{e}^{2x}+C$，则 $f(x)=$（　　）.

A. $2x\mathrm{e}^{2x}(x+1)$　　B. $x\mathrm{e}^{2x}$　　C. $2x^2\mathrm{e}^{2x}$　　D. $2x\mathrm{e}^{2x}$

（15）若$\int f(x)\mathrm{d}x=x\ln x+C$，则 $f(x)=$（　　）.

A. $\ln x+1$　　B. $\ln x$　　C. $x\ln x$　　D. x

（16）若$\int 2x\cos x^2\mathrm{d}x=f(x)+C$，则 $f(x)=$（　　）.

A. $\cos x^2$　　B. $\sin x^2$　　C. $\frac{1}{2}\cos x^2$　　D. $\frac{1}{2}\sin x^2$

（17）若$\int f(x)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-x^2}+C$，则 $f(x)=$（　　）.

A. e^{-x^2}　　B. $-2x\mathrm{e}^{-x^2}$　　C. e^{x^2}　　D. $-2x\mathrm{e}^{x^2}$

（18）设 $f(x)=\ln x$，则$\int f'(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=$（　　）.

A．$x+C$　　　　B．$\dfrac{1}{x}+C$　　　　C．$e^{x}+C$　　　　D．$e^{-x}+C$

（19）设 $f(x)=\arcsin x$，则 $\int f'(\sin x)\cos x\mathrm{d}x=$（　　）．

A．$-x+C$　　　　B．$x+C$　　　　C．$\arccos x+C$　　　　D．$\arcsin x+C$

（20）设 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^{3}$，则 $\int f'(\sqrt{x})\cos x\mathrm{d}x=$（　　）．

A．$-x\sin x+\cos x$　　　　B．$x\sin x-\cos x$

C．$\cos x+x\sin x+C$　　　　D．$x\sin x-\cos x+C$

（21）设 $f(x)=\ln(1+x^{2})$，则 $\int f'(x)\mathrm{d}x=$（　　）．

A．$-x+C$　　　　B．$x+C$　　　　C．$\ln(1+x^{2})$　　　　D．$\ln(1+x^{2})+C$

3．计算题

（1）$\int[x^{3}+3\sqrt{x}+(\ln 2)x]\mathrm{d}x$．　　　　（2）$\int\dfrac{1-\sqrt{1-x^{2}}}{\sqrt{1-x^{2}}}\mathrm{d}x$．

（3）$\int\dfrac{1}{x\sqrt{1-\ln^{2}x}}\mathrm{d}x$．　　　　（4）$\int(3-2\sin x)^{\frac{1}{3}}\cos x\mathrm{d}x$．

（5）$\int(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{2}\mathrm{d}x$．　　　　（6）$\int\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{3-\cos^{2}x}}\mathrm{d}x$．

（7）$\int\dfrac{x}{\sqrt{1-x}^{2}}\mathrm{d}x$．　　　　（8）$\int x\cos 2x\mathrm{d}x$．

（9）$\int\dfrac{2x-2}{x^{2}-2x+3}\mathrm{d}x$．　　　　（10）$\int\dfrac{2x}{x^{2}-2x+2}\mathrm{d}x$．

（11）$\int\dfrac{x+1}{x^{2}+4x+5}\mathrm{d}x$．　　　　（12）$\int\dfrac{xe^{x}}{(1+x)^{2}}\mathrm{d}x$．

测 试 题 B

1．填空题

（1）已知 $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$，则 $\int\dfrac{f(\ln x)}{x}\mathrm{d}x=$________________．

（2）$\int f(x)\mathrm{d}x=\arcsin 2x+C$，则 $f(x)=$________________．

（3）已知 $\int f(x)\mathrm{d}x=x^{2}e^{2x}+C$，则 $f(x)=$________________．

（4）若 e^{-x} 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int xf(x)\mathrm{d}x=$________________．

（5）若 $\int f(x)\mathrm{d}x=\sqrt{x}+C$，则 $\int x^{2}f(1-x^{3})\mathrm{d}x=$________________．

2．选择题

（1）$\int\left(\dfrac{1}{\sin^{2}x}+1\right)\mathrm{d}(\sin x)$ 等于（　　）．

A．$-\cot x+x+C$　　B．$-\cot x+\sin x+C$

C．$-\dfrac{1}{\sin x}+\sin x+C$　　D．$-\dfrac{1}{\sin x}+x+C$

（2）若$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$，则$\int \sin x f(\cos x)\mathrm{d}x$等于（　　）.

A．$F(\sin x)+C$　　B．$-F(\sin x)+C$

C．$F(\cos x)+C$　　D．$-F(\cos x)+C$

（3）若$\int f(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}+C$，则$f(x)$为（　　）.

A．$-\dfrac{1}{x}$　　B．$-\dfrac{1}{x^2}$　　C．$\dfrac{1}{x}$　　D．$\dfrac{1}{x^2}$

（4）设$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，则$\int \mathrm{e}^{-x}f(\mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x$等于（　　）.

A．$F(\mathrm{e}^{-x})+C$　　B．$-F(\mathrm{e}^{-x})+C$

C．$F(\mathrm{e}^{x})+C$　　D．$-F(\mathrm{e}^{x})+C$

（5）若$f'(x)$为连续函数，则$\int f'(2x)\mathrm{d}x=$（　　）.

A．$f(2x)+C$　　B．$f(x)+C$

C．$\dfrac{1}{2}f(2x)+C$　　D．$2f(2x)+C$

3．计算题

（1）$\int x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$.　　（2）$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x(1+2\ln x)}$.

（3）$\int \dfrac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}\mathrm{d}x$.　　（4）$\int x^2\arcsin x\mathrm{d}x$.

（5）$\int \dfrac{x^2+5x+4}{x^4+5x+4}\mathrm{d}x$.　　（6）$\int \dfrac{\ln x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$.

第 5 章　定　积　分

5.1　定积分的概念与性质

一、基本要求

（1）理解定积分的背景.

（2）掌握定积分的定义及其性质.

二、考点知识概述

1. 定积分

（1）定积分的定义.

设函数 $y = f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有定义：

① 在区间 (a, b) 内任意插入 $(n-1)$ 个分点，有

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

把 $[a, b]$ 分成 n 个子区间，$[x_{i-1}, x_i]$ 的长度为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$，$i = 1, 2, \cdots, n$.

② 在每个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任取一点 ξ_i，做积 $f(\xi_i)\Delta x_i$.

③ 做和 $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

④ 记 $\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}$.

取极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0} S_n = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$，如果极限存在，则称 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是可积的，而称极限值为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的定积分，记作

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

式中, $f(x)$ 称为被积函数；$f(x)\,\mathrm{d}x$ 称为被积表达式；x 称为积分变量；$\int_a^b$ 称为定积分号；a 称为积分下限；b 称为积分上限；$[a, b]$ 称为积分区间.

（2）定积分的几何意义.

当被积函数 $f(x) \geqslant 0$ 时，$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 表示以 $f(x)$ 为曲边的曲边梯形的面积.

（3）定积分的物理意义.

变力 $F = F(x)$，$\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x$ 表示物体由 $x = a$ 沿直线运动到 $x = b$ 时，力 $F = F(x)$ 所做的功.

速度 $v = v(t)$，$\int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t$ 表示物体由 $t = a$ 时刻沿直线运动到 $t = b$ 时刻时物体所走过的路程.

2．定积分的存在性定理

（1）设 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

（2）设 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，且最多有有限个第一类间断点，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

（3）设 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

3．定积分的性质

（1）$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x=0$.

（2）$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$，定积分与积分变量无关.

（3）$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$.

（4）a、b 是常数时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是个常数.

（5）$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x=k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，$k$ 为常数.

（6）$\int_a^b[f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\pm\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

注：对于任意有限个函数的和、差都是成立的.

（7）$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

只要各式可积，无论 c 在 $[a,b]$ 之内，还是在 $[a,b]$ 之外都成立.

（8）如果在 $[a,b]$ 上，$f(x)\equiv 1$，则

$$\int_a^b 1\mathrm{d}x=\int_a^b \mathrm{d}x=b-a$$

（9）如果在区间 $[a,b]$ 上，$f(x)\geqslant 0$，$a<b$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0,\quad \left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x,\quad a<b$$

如果在区间 $[a,b]$ 上，$a<b$，$f(x)\leqslant g(x)$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

注：当 $f(x)$ 与 $g(x)$ 连续时，只要不恒等，则一定是 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x<\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

柯西–施瓦茨不等式：

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2\leqslant\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$$

（10）设 m 与 M 分别是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值和最大值，则

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M(b-a),\quad a<b$$

（11）（定积分中值定理）如果函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a)$，$\xi\in(a,b)$.

（12）推广的第一积分中值定理：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且不变号，则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$，$\xi\in(a,b)$.

（13）推广的第二积分中值定理：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调，则在 (a,b)

内至少存在一点ξ，使$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=g(a)\int_a^{\xi} f(x)\mathrm{d}x+g(b)\int_{\xi}^b f(x)\mathrm{d}x$，$\xi\in(a,b)$.

（14）平均值公式：$\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$为函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的平均值.

（15）对称性：若$f(x)$是可积的奇函数，则$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=0$；若$f(x)$是可积的偶函数，则$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.

三、常用解题技巧

1．利用中值定理求极限

【例 1】 求$\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+1}\dfrac{\cos^3 x}{x}\mathrm{d}x$.

解　因为$\int_n^{n+1}\dfrac{\cos^3 x}{x}\mathrm{d}x=\dfrac{\cos^3\xi}{\xi}$，$\xi\in(n,n+1)$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+1}\frac{\cos^3 x}{x}\mathrm{d}x=\lim_{\xi\to\infty}\frac{\cos^3\xi}{\xi}=0$$

2．利用对称性求极限

（1）若$f(x)$是可积的奇函数，则$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=0$.

（2）若$f(x)$是可积的偶函数，则$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.

【例 2】 求$\int_{-1}^1\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\mathrm{d}x$.

解　由于$y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$是连续奇函数，于是

$$\int_{-1}^1\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\mathrm{d}x=0$$

3．利用定积分定义求（无穷项和）极限

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$$

注：计算时一般是等分区间$[a,b]$，$\Delta x_i=\dfrac{b-a}{n}$，$\xi_i$一般取区间$[x_{i-1},x_i]$的端点.

【例 3】 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}\right)$.

解　$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}=\frac{1-0}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)=\sum_{i=1}^n\frac{1-0}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{i}{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\cdot\frac{1-0}{n}=\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\ln 2$$

4．利用柯西-施瓦茨不等式证明不等式

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$$

【例 4】 证明$\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant (b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$.

证 令$\left[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$中的$g(x)=1$，即证.

四、典型题解

【例 5】 利用定积分的几何意义，计算下列积分.

（1）$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x$.

（2）$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x\mathrm{d}x$.

解 （1）$y=\sqrt{a^2-x^2}$ 是上半圆 $x^2+y^2=a^2$（$y>0$）的方程，所以$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x$的几何意义就是半径为$a$的圆的面积的$\frac{1}{4}$，故$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi a^2}{4}$，特别是$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$.

（2）$f(x)=\sin x$是奇函数，在对称区间内的图形关于原点对称，故$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x=0$.

【例 6】 证明不等式$\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \leqslant \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x \leqslant \sqrt{2}$.

证 用定积分的估值定理，先求函数$y=\mathrm{e}^{-x^2}$在$\left[-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$上的最值$y'=\mathrm{e}^{-x^2}(-2x)$，令$y'=0 \Rightarrow x=0$．当$x<0$时，$y'>0$，$y$增加；当$x>0$时，$y'<0$，$y$减小. 所以当$x=0$时，$y$的极大值为

$$\left\{f\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right), f(0), f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}=\left\{1,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right\}$$

所以，在$\left[\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$上，最大值为$f(0)=1$，最小值为$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

由估值定理，有$\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \leqslant \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x \leqslant \sqrt{2}$.

【例 7】 比较$\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$与$\int_0^1 (1+x)\mathrm{d}x$的大小.

解 设$f(x)=\mathrm{e}^x-1-x$，则当$0\leqslant x\leqslant 1$时，$f'(x)=\mathrm{e}^x-1>0$，$f(x)=\mathrm{e}^x-1-x$是单调增加的. 因此当$0\leqslant x\leqslant 1$时，$\mathrm{e}^x \geqslant 1+x$，即$\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 (1+x)\mathrm{d}x$.

【例 8】 证明$\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+1}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=0$.

证 $\int_n^{n+1}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\sin\xi}{\xi}$，$\xi\in[n,n+1]$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+1}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\lim_{\xi\to\infty}\frac{\sin\xi}{\xi}=0$$

【例 9】求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

解　当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$0\leqslant\frac{x^n}{1+x^2}\leqslant x^n$，所以

$$0\leqslant\int_0^1\frac{x^n}{1+x^2}\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{n+1}$$

当 $\frac{1}{n+1}\to 0$（$n\to\infty$）时，由两边夹定理有 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+x^2}\mathrm{d}x=0$.

【例 10】设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $3\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)\mathrm{d}x=f(0)$. 证明：在 $(0,1)$ 内存在一点 c，使 $f'(c)=0$.

证　由积分中值定理 $\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}f(\xi)$，$\frac{2}{3}\leqslant\xi\leqslant 1$，于是 $f(\xi)=f(0)$. 又因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，由罗尔定理知，存在 $c\in(0,\xi)\subset(0,1)$，使 $f'(c)=0$.

5.2　微积分基本定理

一、基本要求

（1）掌握变限积分及其性质.

（2）掌握牛顿-莱布尼茨公式.

二、考点知识概述

1．变限积分的定义

$y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，$x\in[a,b]$，则 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 就是区间 $[a,b]$ 上的一个变上限函数或称变上限积分.

2．变限积分的性质

（1）连续性.

设 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $\varphi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数.

（2）可导性.

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $\varphi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[a,b]$ 上可导，并且它的导数 $\varphi'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=f(x)$.

推广　$\varphi(x)=\int_{g(x)}^{f(x)}h(t)\mathrm{d}t$，其中 $f(x)$、$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，则

$$\varphi'(x)=h[f(x)]f'(x)-h[g(x)]g'(x)$$

（3）设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则函数 $\varphi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数.

3．牛顿-莱布尼茨公式

如果函数 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b)-F(a)$$

三、常用解题技巧

1．变限积分与洛必达法则

【例 1】求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \arctan t\,\mathrm{d}t}{x^2}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \arctan t\,\mathrm{d}t}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{2x}=\dfrac{1}{2}$

2．分段函数的定积分

【例 2】设 $f(x)=\begin{cases}3x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 4, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$，求 $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

解　把区间 $[0,2]$ 分成 $[0,1]$ 与 $[1,2]$ 两个子区间，并在子区间 $[1,2]$ 上规定 $x=1$ 时，$f(1)=4$，从而有

$$\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 3x^2\,\mathrm{d}x+\int_1^2 4\,\mathrm{d}x = x^3\Big|_0^1+4=5$$

四、典型题解

【例 3】若一汽车以速度 $u(t)=27-3t^2$（m/s）沿直线做减速运动，则从 $t=0$ 时刻到汽车停下，所行驶的距离是多少？

解　当 $u(t)=27-3t^2=0$ 时，汽车停下，$t=3\mathrm{s}$，从 $t=0$ 到 $t=3$，汽车行驶的距离为

$$s=\int_0^3 u(t)\mathrm{d}t=\int_0^3(27-3t^2)\mathrm{d}t=54\text{（m）}$$

【例 4】判断下列计算是否正确，试说明理由.

$$\int_{-1}^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=-\int_{-1}^1\frac{1}{1+\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)=-\arctan\frac{1}{x}\Big|_{-1}^1=-\frac{\pi}{2}$$

解　这个结果是错误的. 因为 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 的原函数有 $\arctan x$ 及 $-\arctan\dfrac{1}{x}$，但 $-\arctan\dfrac{1}{x}$ 在 $[-1,1]$ 不连续，故它不满足牛顿-莱布尼茨公式，而 $\arctan x$ 满足公式，即 $\int_{-1}^1\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x\Big|_{-1}^1=\dfrac{\pi}{2}$ 为正确.

【例 5】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x(\arcsin t-t)\mathrm{d}x}{x\left(\mathrm{e}^x-1\right)^3}$.

解　利用等价无穷小及洛必达法则.

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x(\arcsin t-t)\mathrm{d}x}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{\arcsin x-x}{4x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1}{12x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{2x}{2(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}}{24x}=\frac{1}{24}$$

【例 6】计算下列各导数.

（1）$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\sin x}^{\cos x}\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$.

（2）$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x^2}^{0}x\cos t^2\mathrm{d}t$.

解　（1）$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\sin x}^{\cos x}\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_{\sin x}^{0}\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t+\int_{0}^{\cos x}\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\right)=-\cos x\mathrm{e}^{\sin^2 x}-\sin x\mathrm{e}^{\cos^2 x}$

（2）$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x^2}^{0}x\cos t^2\mathrm{d}t=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x\int_{0}^{x^2}\cos t^2\mathrm{d}t=-\left(\int_{0}^{x^2}\cos t^2\mathrm{d}t+x\cdot 2x\cos x^4\right)$

$$=-\left(2x^2\cos x^4+\int_{0}^{x^2}\cos t^2\mathrm{d}t\right)$$

【例 7】已知 $f(x)=3x^2+\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$，求 $f(x)$.

解　设$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=c$，则 $f(x)=3x^2+c$，所以

$$c=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2(3x^2+c)\mathrm{d}x=x^3\Big|_0^2+2c=8+2c$$

即$c=-8$，故 $f(x)=3x^2-8$.

【例 8】求极限 $\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\right)^2}{\int_0^x \mathrm{e}^{2t^2}\mathrm{d}t}$.

解　显然此极限属$\frac{\infty}{\infty}$型，应用洛必达法则求之.

$$原式=\lim_{x\to\infty}\frac{2\mathrm{e}^{x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^{2x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\mathrm{e}^{x^2}}{2x\mathrm{e}^{x^2}}=0$$

5.3　定积分的换元法与分部积分法

一、基本要求

（1）掌握定积分的换元法.

（2）掌握定积分的分部积分法.

二、考点知识概述

1．定积分的换元法

设函数 $f(x)$ 在区间变限积分的定义上连续，而函数 $x=\varphi(t)$ 满足下列条件：

（1）$\varphi(t)$ 是定义在区间$[\alpha,\beta]$上的单调连续函数；

（2）$\varphi'(t)$ 在$[\alpha,\beta]$上连续；

（3）$\varphi(\alpha)=a$，$\varphi(\beta)=b$.

则有换元积分公式：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

注：（1）利用 $x=\varphi(t)$ 进行换元时，积分限要相应地变换，即换元时千万不要忘了换积分限，求出 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 的原函数后，直接按牛顿-莱布尼茨公式计算出定积分值，而不必将换元后的变量再代回原变量.

（2）当设 $\varphi(x)=u$ 时，一定要换积分限，当不设 $\varphi(x)=u$ 时，就不用换积分限.

2．定积分的分部积分法

设 $u'(x)$ 和 $v'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则有

$$\int_a^b uv'\mathrm{d}x=uv\Big|_a^b-\int_a^b u'v\mathrm{d}x$$

三、常用解题技巧

1．周期函数定积分的性质

设 $f(x)$ 是以 T（$T>0$）为周期的连续函数，则对任意常数 a，有：

（1）$\int_a^{a+T}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x$；

（2）$\int_a^{a+nT}f(x)\mathrm{d}x=n\int_0^T f(x)\mathrm{d}x$，$n\in\mathbf{N}$

2．三角函数定积分的性质

设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数，证明：

（1）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)\mathrm{d}x$；

（2）$\int_0^{\pi}xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\mathrm{d}x$.

3．变限积分的奇偶性

若 $f(x)$ 是可积的奇（偶）函数，则 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 一定是偶（奇）函数.

4．瓦里斯公式

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x\left(=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x\right)=\begin{cases}\dfrac{(n-1)!!}{n!}, & n\text{为奇数}\\[2mm] \dfrac{(n-1)!!}{n!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\text{为偶数}\end{cases}$$

四、典型题解

【例 1】求 $\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|\mathrm{d}x$.

解 $\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|\mathrm{d}x=-\int_{\frac{1}{e}}^{1}\ln x\mathrm{d}x+\int_1^e\ln x\mathrm{d}x$

$$=-\left[x\ln x\Big|_{\frac{1}{e}}^{1}-\int_{\frac{1}{e}}^{1}x\mathrm{d}(\ln x)\right]+x\ln x\Big|_1^e-\int_1^e x\mathrm{d}(\ln x)$$

$$=-\left(0-\frac{1}{e}\ln\frac{1}{e}-\int_{\frac{1}{e}}^{1}dx\right)+e-\int_{1}^{e}dx$$

$$=-\frac{1}{e}+\left(1-\frac{1}{e}\right)+e-(e-1)=2-\frac{2}{e}$$

【例 2】（1）求 $\int_0^1\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx$.

（2）设 $f(x)=\begin{cases}x\sin x, & x>0\\ -1, & x<0\end{cases}$，求 $\int_0^{2\pi}f(x-\pi)dx$.

解　（1）$\int_0^1\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx=x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\Big|_0^1-\int_0^1 xd\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]$

$$=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-\int_0^1\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$$

$$=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}d\left(x^2+1\right)$$

$$=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-\sqrt{x^2+1}\Big|_0^1=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)+1-\sqrt{2}$$

（2）$\int_0^{2\pi}f\left(x-\pi\right)dx\overset{x-\pi=t}{=}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(t\right)dt=\int_{-\pi}^{0}f\left(t\right)dt+\int_0^{\pi}f\left(t\right)dt$

$$=\int_{-\pi}^{0}\left(-1\right)dt+\int_0^{\pi}t\sin tdt=-\pi-\int_0^{\pi}td(\cos t)$$

$$=-\pi-\left(t\cos t\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\cos tdt\right)=-\pi+\pi+\sin t\Big|_0^{\pi}=0$$

【例 3】若 $f\left(t\right)$ 是连续的奇（偶）函数，证明 $\int_0^x f\left(t\right)dt$ 是偶（奇）函数.

证　设 $F\left(x\right)=\int_0^x f\left(t\right)dt$，则

$$F\left(-x\right)=\int_0^{-x}f\left(t\right)dt\overset{t=-u}{=}-\int_0^x f\left(-u\right)du=\int_0^x f\left(u\right)du=\int_0^x f\left(t\right)dt=F(x)$$

所以当 $f(t)$为连续的奇函数时，$\int_0^x f\left(t\right)dt$ 是偶函数. 同理可证当 $f(t)$是偶函数时，$\int_0^x f\left(t\right)dt$ 是奇函数.

【例 4】计算 $I=\int_0^{2\pi}\sin^n xdx$，$n$ 为自然数.

解　$I=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^n xdx=\begin{cases}0, & n\text{为奇数}\\ 2\int_0^{\pi}\sin^n xdx, & n\text{为偶数}\end{cases}$

事实上 $\int_0^{\pi}\sin^n xdx\overset{\frac{\pi}{2}-x=u}{=}-\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-u\right)du=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^n udu$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n udu=2\cdot\frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\frac{\pi}{2}=\pi\frac{(n-1)!!}{n!!}$$

所以 $I=\begin{cases}0, & n\text{为奇数}\\ 2\pi\frac{(n-1)!!}{n!!}, & n\text{为偶数}\end{cases}$

【例 5】计算 $\int_{-1}^{1}\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)^2dx$.

解 $\int_{-1}^{1}\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)^2\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\left(x^2+1-x^2+2x\sqrt{1-x^2}\right)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\left(1+2x\sqrt{1-x^2}\right)\mathrm{d}x=2$

【例 6】 设 $f(x)=\int_1^{x^2}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$，求 $\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$.

解
$$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x^2=\frac{1}{2}\left\{x^2f(x)\Big|_0^1-\int_0^1 x^2\mathrm{d}\left[f(x)\right]\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left[\left(x^2\int_1^{x^2}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\Big|_0^1-\int_0^1 x^2\cdot 2x\mathrm{e}^{-x^4}\mathrm{d}x\right)\right]$$
$$=-\frac{1}{2}\int_0^1 2x^3\mathrm{e}^{-x^4}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int_0^1\mathrm{e}^{-x^4}\mathrm{d}\left(-x^4\right)=\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-x^4}\Big|_0^1=\frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{-1}-1\right)$$

【例 7】 证明积分等式 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin 2x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)\mathrm{d}x$.

证
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin 2x)\mathrm{d}x\overset{2x=\frac{\pi}{2}-t}{=}-\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}f\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right]\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(\cos t)\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)\mathrm{d}x$$

5.4 反 常 积 分

一、基本要求

（1）掌握反常积分的定义及其性质.
（2）掌握反常积分的计算.
（3）掌握 Γ 函数.

二、考点知识概述

1. 无穷限的反常积分

（1）无穷限的反常积分的定义.
上限为无穷的反常积分：设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续，取 $b>a$，有
$$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$
下限为无穷的反常积分：设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,b]$ 上连续，取 $b>a$，有
$$\int_{-\infty}^{b}f(x)\mathrm{d}x=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$
上、下限为无穷的反常积分：如果 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，有
$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{a}f(x)\mathrm{d}x+\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$$
（2）无穷限反常积分的计算.
上限为无穷的反常积分：设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上的一个原函数，则
$$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^{+\infty}$$
下限为无穷的反常积分：设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $(-\infty,b]$ 上的一个原函数，则

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_{-\infty}^{b}$$

上、下限为无穷的反常积分：设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的一个原函数，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

注：计算时要解出原函数再代入上、下限，不要求出部分原函数就代入上、下限.

（3）性质.

① $\int_{a}^{+\infty} Af(x)\mathrm{d}x$ 与 $A\int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$（$A\neq 0$ 且为常数）具有相同的敛散性.

② $\int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_{a}^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 都收敛，则 $\int_{a}^{+\infty}\left[f(x)\pm g(x)\right]\mathrm{d}x$ 收敛，且

$$\int_{a}^{+\infty}\left[f(x)\pm g(x)\right]\mathrm{d}x = \int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \pm \int_{a}^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$$

注：①若 $\int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_{a}^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 都发散，则 $\int_{a}^{+\infty}\left[f(x)\pm g(x)\right]\mathrm{d}x$ 也可能收敛;

②定积分的换元法和分部积分法在反常积分中成立.

2．无界函数的反常积分（瑕积分）

（1）瑕积分的定义.

瑕点：如果函数 $f(x)$ 在点 a 的任一邻域内都无界，则称点 a 为函数 $f(x)$ 的瑕点（也称为无界间断点）.

下限为瑕点的瑕积分：设函数 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上连续，点 a 为 $f(x)$ 的瑕点，取 $\varepsilon>0$，则

$$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\mathrm{d}x$$

上限为瑕点的瑕积分：设函数 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上连续，点 b 为 $f(x)$ 的瑕点，取 $\varepsilon>0$，则

$$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x$$

上、下限为瑕点的瑕积分：设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，点 a、b 为 $f(x)$ 的瑕点，取 $\varepsilon>0$，$\delta>0$，$a<c<b$，则

$$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \lim_{\delta\to 0}\int_{c}^{b-\delta} f(x)\mathrm{d}x \qquad (\varepsilon\text{、}\delta\text{ 独立})$$

瑕点在中间的瑕积分：如果函数 $f(x)$ 在 $[a,c)$、$(c,b]$ 上连续，c 是瑕点，则

$$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\delta\to 0^{+}}\int_{a}^{c-\delta} f(x)\mathrm{d}x + \lim_{\varepsilon\to 0^{+}}\int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\mathrm{d}x \qquad (\varepsilon\text{、}\delta\text{ 独立})$$

（2）瑕积分的计算.

设 $x=a$ 为 $f(x)$ 的瑕点，在 $(a,b]$ 上，$F'(x)=f(x)$，则

$$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_{a}^{b} = F(b)-F\left(a^{+}\right)$$

其他情况类似.

3．Γ 函数

（1）定义：

$\int_{0}^{+\infty} x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$（其中 α 称为参变量）作为参变量 α 的函数，称为 Γ 函数，记为

$$\Gamma(\alpha) = \int_{0}^{+\infty} x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$$

（2）性质：

①当$\alpha>0$时，$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$收敛.

②$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$.

③$\Gamma(1)=1$.

④$\Gamma(n+1)=n!$（n为自然数）.

三、常用解题技巧

两个常见反常积分的敛散性.

（1）$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$（$a>0$），当$p>1$时收敛，当$p\leqslant1$时发散.

$$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x=\begin{cases}+\infty, & p\leqslant1\\ \dfrac{a^{1-p}}{p-1}, & p>1\end{cases}$$

特例：当$a=1$时，$p>1$，$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{p-1}$.

（2）$\int_0^1\frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$的敛散性，$p<1$时收敛，$p\geqslant1$时发散.

$$\int_0^1\frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{1}{1-p}, & p<1\\ \text{发散}, & p\geqslant1\end{cases}$$

$\int_a^b\frac{1}{(x-a)^p}\,\mathrm{d}x$的敛散性，$p<1$时收敛，$p\geqslant1$时发散.

$$\int_a^b\frac{1}{(x-a)^p}\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{(b-a)^{1-p}}{1-p}, & p<1\\ \text{发散}, & p\geqslant1\end{cases}$$

四、典型题解

【例 1】下面反常积分发散的是（　　）.

A. $\int_{-1}^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$　　B. $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$　　C. $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{1}{x\ln^2x}\mathrm{d}x$　　D. $\int_{-1}^1\frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x$

解　A. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$的原函数为$\arcsin x$，±1为瑕点，则

$$\int_{-1}^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\arcsin x\Big|_{-1}^1=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi$$

故收敛.

B. $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$，故收敛.

C. $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{1}{x\ln^2x}\mathrm{d}x=\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{1}{\ln^2x}\mathrm{d}(\ln x)=-\frac{1}{\ln x}\Big|_{\mathrm{e}}^{+\infty}=1$，故收敛.

D. $x=0$，$\dfrac{1}{\sin x}$ 无意义，$\int_0^1 \dfrac{1}{\sin x}\mathrm{d}x=\ln\left|\dfrac{1}{\sin x}-\cot x\right|\Bigg|_1^0=\infty$，发散，所以 $\int_{-1}^1 \dfrac{1}{\sin x}\mathrm{d}x$ 发散.

注：此时不能用奇函数在对称区间上的积分为 0 的结论.

【例 2】下列命题中正确的有________个.

（1）设 $f(x)$ 是在 $(+\infty,-\infty)$ 上连续的奇函数，则 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=0$.

（2）设 $f(x)$ 在 $(+\infty,-\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{d}x$ 存在，则 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

（3）$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 均发散，则不能确定 $\int_a^{+\infty}\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x$ 是否发散.

（4）若 $\int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 均发散，则不能确定 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 是否发散.

解　要逐一分析.

（1）$f(x)$ 是在 $(+\infty,-\infty)$ 上连续的奇函数，不能推导出 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=0$.

例如，$\int_{-\infty}^{0} x\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0} x\mathrm{d}x+\int_0^{+\infty} x\mathrm{d}x$，而 $\int_0^{+\infty} x\mathrm{d}x$ 发散，故 $\int_{-\infty}^{+\infty} x\mathrm{d}x$ 发散.

（2）显然也是错误的.

（3）是正确的，两个发散的和未必发散，如 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}\int_1^{+\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$ 发散，$g(x)=$
$-\dfrac{1}{x}\int_1^{+\infty}\left(-\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$ 发散，但 $\int_1^{+\infty}\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ 收敛，所以（3）正确.

（4）只要有一个发散，如 $\int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x$，则 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 一定发散，所以（4）一定发散.

综上分析，只有一个正确.

【例 3】求 $I=\int_0^{+\infty}\dfrac{x\mathrm{e}^x}{\left(1+\mathrm{e}^x\right)^2}\mathrm{d}x$.

解
$$I=\int_0^{+\infty}\frac{x}{\left(1+\mathrm{e}^x\right)^2}\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^x+1\right)=-\int_0^{+\infty}x\mathrm{d}\frac{1}{\mathrm{e}^x+1}$$
$$=-\left(\frac{x}{\mathrm{e}^x+1}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}\frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x\right)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}(1+\mathrm{e}^{-x})=-\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)\Big|_0^{+\infty}=\ln 2$$

【例 4】求 $I=\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x$.

解
$$I\overset{\sqrt{x-1}=t}{=}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\left(t^2+1\right)t}2t\mathrm{d}t=2\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t=2\arctan t\Big|_0^{+\infty}=\pi$$

【例 5】填空题.

（1）$\int_0^1\dfrac{1}{x^{3p-1}}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}$，则 $p=$_______.

（2）$\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^{5p+2}}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}$，则 $p=$______.

解　（1）$\int_0^1 \frac{1}{x^{3p-1}}\mathrm{d}x=\frac{1}{1-(3p-1)}=\frac{1}{2-3p}=\frac{1}{2}\Rightarrow p=0$.

（2）$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{5p+2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{5p+2-1}=\frac{1}{3}\Rightarrow p=\frac{2}{5}$.

【例 6】求积分 $\int_0^{+\infty}\min\left\{\mathrm{e}^{-x},\frac{1}{2}\right\}\mathrm{d}x$.

解　$\int_0^{+\infty}\min\left\{\mathrm{e}^{-x},\frac{1}{2}\right\}\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{1}{2}, & x\in[0,\ln 2]\\ \mathrm{e}^{-x}, & x\in[\ln 2,+\infty]\end{cases}$

$$\int_0^{+\infty}\min\left\{\mathrm{e}^{-x},\frac{1}{2}\right\}\mathrm{d}x=\int_0^{\ln 2}\frac{1}{2}\mathrm{d}x+\int_{\ln 2}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln 2-\mathrm{e}^{-x}\Big|_{\ln 2}^{+\infty}=\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{2}$$

【例 7】已知 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$，证明 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$.

证　$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}\sin^2 x\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)=-\left[\frac{\sin^2 x}{x}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}(\sin^2 x)\right]$

$$=-\frac{\sin^2 x}{x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{2\sin x\cos x}{x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{2x}\mathrm{d}(2x)=\frac{\pi}{2}$$

测　试　题

1．填空题

（1）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7 x\mathrm{d}x=$________________.

（2）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{10} x\mathrm{d}x=$________________.

（3）$\int_{-3}^{3}(x^3+4)\sqrt{9-x^2}\mathrm{d}x=$________________.

（4）$\int_{-3}^{3}x\sqrt{|x|}\mathrm{d}x=$________________.

（5）$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{3-5p}}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{x^{2+7p}}\mathrm{d}x$，则 $p=$________________.

（6）$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x(\arctan t)^2\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2+1}}=$________________.

（7）$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}\mathrm{d}t}{x^3}=$________________.

（8）$\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^x(1-\cos t)\mathrm{d}t}{\ln(1+x^3)}=$________________.

（9）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \arctan t\mathrm{d}t}{\ln\left(1+x^2\right)}=$________________.

（10）$f\left(x\right)=\int_1^{x^3}\mathrm{e}^t\mathrm{d}t$，则 $\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}=$________________.

（11）$f\left(x\right)=\int_a^{\mathrm{e}^x}\dfrac{\ln t}{t}\mathrm{d}t$，则 $f'\left(x\right)=$________________.

（12）$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{x^2}\sin t^2\mathrm{d}t=$________________.

（13）$f\left(x\right)=\int_{x^2}^5\sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t$，则 $f'\left(1\right)=$________________.

（14）$\int_0^1\dfrac{1}{x^{3p-1}}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}$，则 $p=$________________.

（15）$\int_0^{+\infty}x^4\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=$____________________.

2．选择题

（1）设 $I_1=\int_{\mathrm{e}}^x\ln t\mathrm{d}t$、$I_2=\int_{\mathrm{e}}^x\ln t^2\mathrm{d}t$，$x>1$，则（　　）.

A．仅当 $x>\mathrm{e}$ 时，$I_1<I_2$　　B．对一切 $x\neq\mathrm{e}$，有 $I_1<I_2$

C．仅当 $x<\mathrm{e}$ 时，$I_1<I_2$　　D．对一切 $x\neq\mathrm{e}$，有 $I_1\geqslant I_2$

（2）$f(x)$是连续的偶函数，下列函数中（　　）一定是奇函数.

A．$\int f\left(x\right)\mathrm{d}x$　　B．$\int_a^x f\left(t\right)\mathrm{d}t$　　C．$\int_0^x f\left(t\right)\mathrm{d}t$　　D．$\int_x^1 f\left(t\right)\mathrm{d}x$

（3）若 $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^{5p+1}}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}$，则 $p=$（　　）.

A．$-\dfrac{2}{5}$　　B．$\dfrac{2}{5}$　　C．$\dfrac{3}{5}$　　D．$-\dfrac{3}{5}$

（4）下列反常积分发散的是（　　）.

A．$\int_{-\infty}^{+\infty}\cos x\mathrm{d}x$　　B．$\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^3}\mathrm{d}x$　　C．$\int_0^2\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}\mathrm{d}x$　　D．$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$

（5）$\int_{-1}^1 x\cos x\mathrm{d}x=$（　　）.

A．-1　　B．0　　C．1　　D．2

（6）$\int_0^2\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x=$（　　）.

A．2π　　B．π　　C．4π　　D．3π

（7）$\int_0^1 x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=$（　　）.

A．e　　B．0　　C．1　　D．$\mathrm{e}-1$

（8）$\int_0^1\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=$（　　）.

A．$\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^2-1)$　　B．$\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^2-\mathrm{e})$　　C．e　　D．2e

（9）$\int_{-1}^1 x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x=$（　　）.

A．-1　　B．0　　C．1　　D．2

（10）若 $\int_0^1 (2x+a)\mathrm{d}x = 2$，则 $a=$（　　）．

A．2　　B．-1　　C．0　　D．1

（11）$\int_0^1 x\arctan x\mathrm{d}x =$（　　）．

A．$\pi-2$　　B．$\frac{1}{2}(\pi-2)$　　C．$\frac{1}{3}(\pi-2)$　　D．$\frac{1}{4}(\pi-2)$

（12）$\int_{-1}^1 x^3\sin x^2\mathrm{d}x =$（　　）．

A．-1　　B．0　　C．1　　D．2

3．计算题

（1）求 $\int_1^{e^2} \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}\mathrm{d}x$．

（2）求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos^3\varphi\mathrm{d}\varphi$．

（3）求 $\int_{-2}^0 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}$．

（4）求 $\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\mathrm{d}x$．

（5）已知 $f(x)=x^2+\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$，求 $f(x)$．

（6）求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x\mathrm{d}x$．

（7）求 $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$．

（8）求 $\int_{-2}^2 \max(x,x^2)\mathrm{d}x$．

（9）求 $\int_1^e x\ln x\,\mathrm{d}x$．

（10）求 $\int_1^0 xe^{-x}\mathrm{d}x$．

（11）设 $f(x)=x-\int_0^{\pi} f(x)\cos x\mathrm{d}x$，求 $f(x)$．

（12）求 $\int_0^1 x\arctan x\mathrm{d}x$．

（13）求 $\int_0^2 f(x-1)\mathrm{d}x$，其中 $f(x)=\begin{cases} e^{-2x}, & -1\leqslant x\leqslant 0 \\ \frac{x^2}{1+x^2}, & 0<x\leqslant 1 \end{cases}$．

（14）求 $\int_0^1 x^2e^{x^3}\mathrm{d}x$．

（15）求 $\int_0^1 x(1+x^2)\mathrm{d}x$．

第 6 章　定积分的应用

6.1　平面图形的面积

一、基本要求

（1）掌握定积分的微元法.
（2）掌握平面图形面积的求法.

二、考点知识概述

1．微元法基本步骤

（1）确定变量 x 的变化区间 $[a,b]$.
（2）任意分割取典型：$[a,b]=[a,x_1]\cup[x_2,x_3]\cup\cdots\cup[x_{i-1},x_i]\cup\cdots\cup[x_{n-1},b]$.
取典型区间：$[x_{i-1},x_i]\overset{\text{记成}}{=\!=\!=}[x,x+\mathrm{d}x]$.
注：应用时在 $[a,b]$ 内任取一点 x，做出典型区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 即可.
（3）典型区间求微元：$\mathrm{d}y=f(x)\mathrm{d}x$.
（4）无限累加求和，即 $y=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

2．使用微元法的条件

（1）所求量 y 是与一个变量 x 的变化区间 $[a,b]$ 有关的量.
（2）所求量 y 对区间 $[a,b]$ 具有可加性，即：
当 $[a,b]=[a,x_1]\cup[x_2,x_3]\cup\cdots\cup[x_{i-1},x_i]\cup\cdots\cup[x_{n-1},b]$ 时，所求量 $y=y_1+y_2+\cdots+y_n$.
（3）典型区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 上，所求量 y 的微元 $\mathrm{d}y=f(x)\mathrm{d}x$（可近似求值）.

3．微元法的应用

（1）曲边梯形的面积.
① 在 $[a,b]$ 内任取一点 x，做出典型区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$（见图 6.1）.
② 典型区间上求面积微元：$\mathrm{d}S=f(x)\mathrm{d}x$.
③ 无限累加求和，即 $S=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

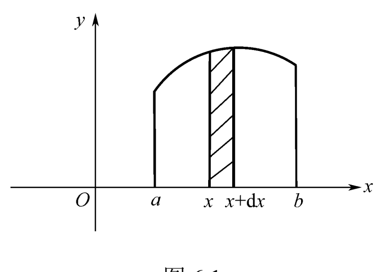

图 6.1

（2）变速直线运动路程.
已知某物体做直线运动，其速度 $v=v(t)$ 是个变速，求 t 在 $[a,b]$ 内走的路程.
① 在 $[a,b]$ 内任取一点 t，做出典型区间 $[t,t+\mathrm{d}t]$.

② 典型区间上求路程微元：$\mathrm{d}s = v(t)\mathrm{d}t$ （在$[t, t+\mathrm{d}t]$上近似看作匀速运动）.

③ 无限累加求和，即$s = \int_a^b v(t)\mathrm{d}t$.

4．平面图形面积

（1）直角坐标情形.

① X型（见图 6.2）：

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\mathrm{d}x$$

② Y型（见图 6.3）：

$$S = \int_c^d [f_2(y) - f_1(y)]\mathrm{d}y$$

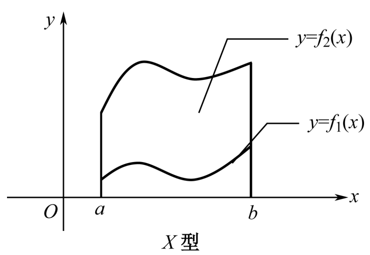

图 6.2

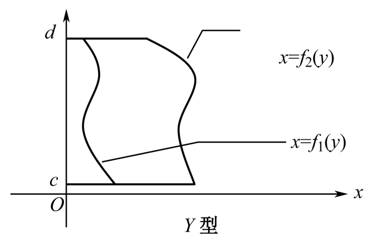

图 6.3

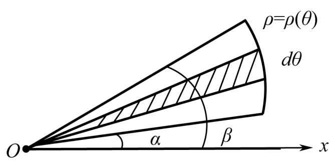

图 6.4

③ 混合型：既不是X型，也不是Y型，称为混合型.

做法：将混合型分解成X型、Y型，分别求面积再求和.

（2）极坐标情形（见图 6.4）.

$$S = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}\rho^2(\theta)\mathrm{d}\theta$$

（3）曲线为参数方程.

曲线为$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$，$\alpha \leqslant t \leqslant \beta$，$\varphi'(t)$、$\psi'(t)$在$[\alpha, \beta]$上连续.

$$S = \int_a^b |y| \mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta |\psi(t)||\varphi'(t)| \mathrm{d}t$$

三、常用解题技巧

微元法

（1）确定变量x的变化区间$[a, b]$.

（2）任意分割取典型：$[x_{i-1}, x_i] \xlongequal{\text{记成}} [x, x+\mathrm{d}x]$.

注：应用时在$[a, b]$内任取一点x，做出典型区间$[x, x+\mathrm{d}x]$即可.

（3）典型区间求微元：$\mathrm{d}y = f(x)\mathrm{d}x$.

（4）无限累加求和，即$y = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

【例 1】一质点m坐标为$(a, 0)$，一射线平行于x轴，起点为$(2a, 0)$，方向为x轴正向，密度为μ（均匀），求射线对质点的引力.

解　如图 6.5 所示.

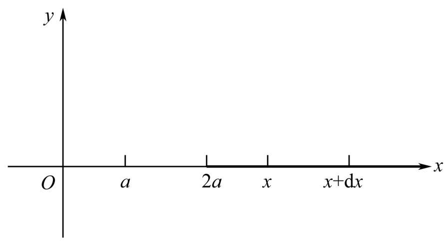

图 6.5

① 确定变量 x 的变化区间 $[2a,+\infty]$.

② 在 $[2a,+\infty]$ 内任取一点 x，做出典型区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$.

③ 典型区间求微元：$\mathrm{d}F=\dfrac{km_1m_2}{r^2}=\dfrac{km\mu\mathrm{d}x}{(x-a)^2}=\dfrac{km\mu}{(x-a)^2}\mathrm{d}x$.

④ 无限累加求和，即 $F=\int_{2a}^{+\infty}\dfrac{km\mu}{(x-a)^2}\mathrm{d}x$.

$$F=\int_{2a}^{+\infty}\frac{km\mu}{(x-a)^2}\mathrm{d}x=-km\mu\frac{1}{x-a}\bigg|_{2a}^{+\infty}=\frac{1}{a}km\mu$$

射线对质点的引力为 $\dfrac{1}{a}km\mu$.

思考：若质点的坐标为 $(0,a)$，此时射线对质点的引力为多少？

四、典型题解

【例 2】用元素法求由 $y=\ln x$、$y=0$、$x=\mathrm{e}$ 所围的平面图形的面积.

解　它们所围的图形如图 6.6 所示.

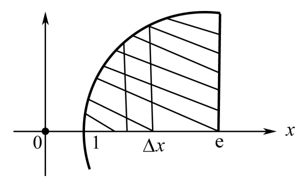

图 6.6

（1）取 $\Delta x\subset[1,\mathrm{e}]$.

（2）这一条的面积 $\Delta s\approx f(x)\Delta x=\ln x(\Delta x)=\ln x\mathrm{d}x$

（3）$s=\int_1^{\mathrm{e}}\ln x\mathrm{d}x=x\ln x\big|_1^{\mathrm{e}}-\int_1^{\mathrm{e}}x\mathrm{d}\ln x=\mathrm{e}-\int_1^{\mathrm{e}}\mathrm{d}x=1$.

【例 3】用元素法计算心脏线 $p=a(1+\sin\theta)$（$a>0$）所围成的图形的面积.

解　如图 6.7 所示.

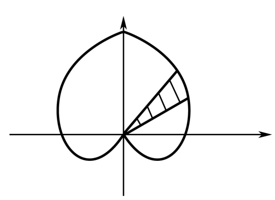

图 6.7

（1）θ 的变化区间为 $[0,2\pi]$，任取其上一个小区间 $[\theta,\theta+\mathrm{d}\theta]$ 窄曲边扇形的面积（阴影部分），其面积近似于半径为 $a(1+\sin\theta)$、中心角为 $\mathrm{d}\theta$ 的圆扇形的面积.

（2）$\mathrm{d}s=\dfrac{1}{2}a^2(1+\sin\theta)^2\mathrm{d}\theta$.

（3） $s=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}a^2\left(1+\sin\theta\right)^2\mathrm{d}\theta=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\left(1+2\sin\theta+\sin^2\theta\right)\mathrm{d}\theta$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\left(1+2\sin\theta+\frac{1-\cos2\theta}{2}\right)\mathrm{d}\theta=\frac{a^2}{2}\left(2\pi+0+\pi-0\right)=\frac{3}{2}\pi a^2$$

【例 4】用元素法求 $y=\sqrt{x}$ 、 $y=x$ 所围平面图形绕 x 轴旋转而成的立体的体积.

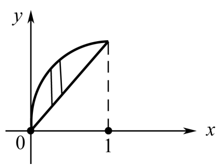

图 6.8

解　它们所围的图形如图 6.8 所示.

（1）取 $\Delta x\subset[0,1]$.

（2）将 Δx 这一条（阴影部分）近似看作矩形，这一条绕 x 轴旋转成一环柱体

$$\mathrm{d}V_x=\pi\left[(\sqrt{x})^2-x^2\right]\mathrm{d}x$$

（3） $V_x=\int_0^1\pi\left(x-x^2\right)\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1-\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1\right)=\frac{\pi}{6}$.

【例 5】用元素法求曲线 $y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ 由点 $(0,0)$ 到点 $\left(1,\frac{2}{3}\right)$ 的一段弧长.

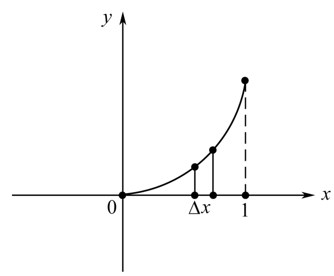

图 6.9

解　图形如图 6.9 所示

（1）取 $\Delta x\subset[0,1]$.

（2）将 Δx 对应的这段弧长近似为 $\mathrm{d}l=\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x$.

（3） $l=\int_0^1\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{1+x}\mathrm{d}x$

$$=\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right).$$

【例 6】求由曲线 $x=1-y^2$ 及 $y=x+1$ 所围成的平面图形的面积.

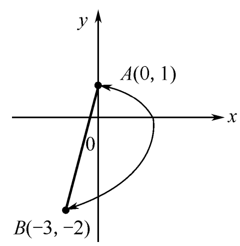

图 6.10

解　所围图形如图 6.10 所示.

$$s=\int_{-2}^1\left[\left(1-y^2\right)-\left(y-1\right)\right]\mathrm{d}y$$

$$=\left(2y-\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{3}y^3\right)\Big|_{-2}^1=\frac{9}{2}$$

【例 7】求由 $y=\mathrm{e}^x$ 、 $y=\mathrm{e}^{-x}$ 、 $x=1$ 所围图形的面积 S.

解　$S=\int_0^1\left(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x\Big|_0^1+\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^1=\mathrm{e}+\mathrm{e}^{-1}-2$

6.2　体积与曲线的弧长

一、基本要求

（1）掌握旋转体体积公式.

（2）掌握已知平行截面面积的立体体积.
（3）掌握平面曲线的弧长公式.

二、考点知识概述

1．旋转体体积

（1）平面图形绕 x 轴旋转的旋转体体积公式.

① $y=f(x)\geqslant 0$，直线 $x=a$、$x=b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周生成的立体（见图 6.11），其体积公式为 $V_x=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$.

② $y=f(x)\geqslant 0$，$y=g(x)\geqslant 0$，$f(x)\geqslant g(x)$ 及直线 $x=a$、$x=b$ 所围成的图形（见图 6.12）绕 x 轴旋转生成的立体的体积为 $V_x=\pi\int_a^b\left[f^2(x)-g^2(x)\right]\mathrm{d}x$.

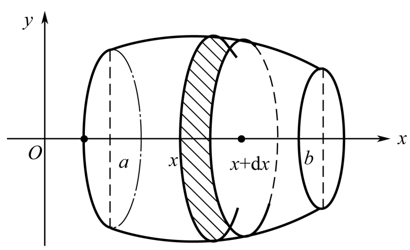

图 6.11

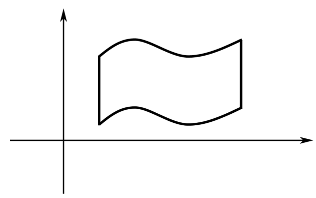

图 6.12

（2）平面图形绕 y 轴旋转的旋转体体积公式.

① 由曲线 $x=\varphi(y)$，直线 $y=c$、$y=d$（$c<d$）与 y 轴所围成的图形（见图 6.13）绕 y 轴旋转一周而生成的旋转体的体积为

$$V_y=\pi\int_c^d\varphi^2(y)\mathrm{d}y$$

② 由两条连续曲线 $x=\varphi(y)\geqslant 0$、$x=h(y)\geqslant 0$、$\varphi(y)\geqslant h(y)$ 及直线 $y=c$、$y=d$ 所围图形绕 y 轴旋转一周生成的立体体积为

$$V_y=\pi\int_c^d\varphi^2(y)\mathrm{d}y-\pi\int_c^d h^2(y)\mathrm{d}y$$

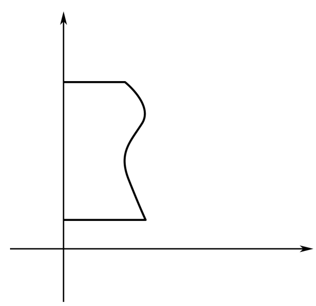

图 6.13

2．已知平行截面面积的立体体积

$$V=\int_a^b s(x)\mathrm{d}x$$

式中，$s(x)$ 为截面面积.

3．平面曲线弧长

（1）设光滑曲线弧段 $\overset{\frown}{AB}$ 的参数方程为 $x=\varphi(t)$、$y=\psi(t)$，$\alpha\leqslant t\leqslant\beta$，$\varphi'(t)$、$\psi'(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续，则

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left[\psi'(t)\right]^2+\left[\varphi'(t)\right]^2}\,\mathrm{d}t$$

（2）曲线弧段由直角坐标方程给出：$y=f(x)$，$a\leqslant x\leqslant b$，$f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则

$$l=\int_a^b\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,\mathrm{d}x$$

（3）光滑曲线弧段 $\overset{\frown}{AB}$ 由极坐标方程给出：$\rho=\rho(\theta)$，$\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$，其中 $\rho'(\theta)$ 连续，$x=\rho\cos\theta=\rho(\theta)\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta=\rho(\theta)\sin\theta$，则

$$l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,\mathrm{d}\theta$$

三、典型题解

【例 1】 求椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 所围成的图形：

（1）面积 S；　　（2）V_x；　　（3）V_y.

解 （1）由对称性可知

$$S=4\int_0^a\sqrt{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}\mathrm{d}x=\frac{4b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{4b}{a}\cdot\frac{\pi a^2}{4}=\pi ab$$

（2）$V_x=2\pi\int_0^a b^2\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)\mathrm{d}x=2b^2\pi\left(a-\dfrac{x^3}{3a^2}\Big|_0^a\right)=\dfrac{4}{3}\pi ab^2$

（3）$V_y=2\pi\int_0^b a^2\left(1-\dfrac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}y=\dfrac{4}{3}\pi a^2b$

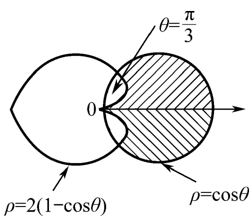

图 6.14

【例 2】 求在圆 $\rho=2\cos\theta$ 之内，心脏线 $\rho=2(1-\cos\theta)$ 之外的平面图形的面积（见图 6.14 中阴影部分）.

解 圆与心脏线的交点 p 的坐标为 $\left(1,\dfrac{\pi}{3}\right)$，由于平面图形关于极轴对称，因此其面积为

$$S=2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2}\left\{(2\cos\theta)^2-\left[2(1-\cos\theta)\right]^2\right\}\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(4\cos^2\theta-4+8\cos\theta-4\cos^2\theta\right)\mathrm{d}\theta=4\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)$$

【例 3】 求由 $y=\mathrm{e}^x$、$y=\mathrm{e}^{-x}$、$x=1$ 所围图形的体积 V_x.

解 $V_x=\pi\int_0^1\left(\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{-2x}\right)\mathrm{d}x=\pi\left(\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\Big|_0^1+\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\Big|_0^1\right)$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\mathrm{e}^2+\mathrm{e}^{-2}-2\right)=\frac{\pi}{2}\left(\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}\right)^2$$

【例 4】 求摆线 $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\y=a(1-\cos t)\end{cases}$（$0\leqslant t\leqslant 2\pi$）与 x 轴所围图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积 V_x.

解 $V_x=\pi\int_0^{2\pi}y^2(t)\,\mathrm{d}\left[x(t)\right]=\pi\int_0^{2\pi}a^3(1-\cos t)^3\,\mathrm{d}t=5\pi^2a^3$

【例 5】 计算底面是半径为 R 的圆，垂直于底面上一条固定直径的所有截面都是等边三角形的立体体积（如图 6.15 所示）.

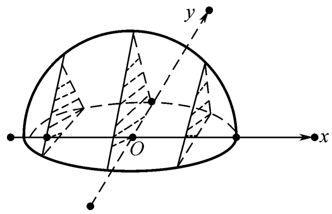

图 6.15

解　以底面圆中心为原点，底面圆直径为 x 轴建立如图 6.15 所示的坐标系，设过点 x 且垂直于 x 轴的截面面积为 $A(x)$．已知此截面为等边三角形，由于底面是半径为 R 的圆，所以相应于点 x 的截面的底边长为 $2\sqrt{R^2-x^2}$，高为 $\sqrt{3}\sqrt{R^2-x^2}$，因而 $A(x)=\sqrt{3}\left(R^2-x^2\right)$，则

$$V=2\int_0^R\sqrt{3}\left(R^2-x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\sqrt{3}R^3$$

6.3　定积分在物理上的应用

一、基本要求

（1）掌握变力沿直线做功.

（2）掌握水压力.

二、考点知识概述

1．变力沿直线做功

变力 $F(x)$ 沿直线由 a 位移到 b 所做的功为 $W=\int_a^b F(x)\mathrm{d}x$.

2．水压力

水深 h 处的压强为 $P=\rho gh$，$F=PS$（压强为恒压），水深不同点处的压强 P 不相等，计算平板所受的水压力要采用微元法：求出典型深度区间上的压力微元，对放置深度区间积分即可.

三、常用解题技巧

微元法

（1）确定变量 x 的变化区间 $[a,b]$.

（2）任意分割取典型：$[x_{i-1},x_i]\overset{\text{记成}}{=\!=\!=}[x,x+\mathrm{d}x]$.

注：应用时在 $[a,b]$ 内任取一点 x，做出典型区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 即可.

（3）典型区间求微元：$\mathrm{d}y=f(x)\mathrm{d}x$.

（4）无限累加求和，即 $y=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

四、典型题解

【例 1】有一圆柱形的大蓄水池，直径为 20m，高为 30m，盛水的深度为 27m，求将水从池口全部抽出所需做的功.

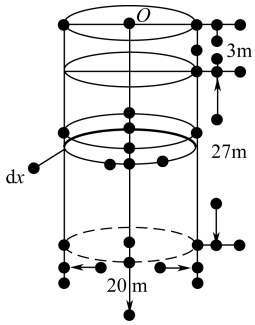

图 6.16

解　建立坐标系，如图 6.16 所示.

水深区间为$[3,30]$，考察小区间$[x,x+\mathrm{d}x]$上的这一水层到池口的距离为 xm，由于水的密度为$10^3\mathrm{kg/m^3}$，因此该水层的质量为$\pi\cdot10^2\cdot10^3\mathrm{d}x=10^5\pi\mathrm{d}x$（kg），所以要把这层水抽出水池所需的力$F=g\cdot m=9.8\times10^5\pi\mathrm{d}x$（N），从而功微元为$\mathrm{d}W=9.8\times10^5\pi x\mathrm{d}x$.

故$W=\int_3^{30}9.8\times10^5\pi x\mathrm{d}x=9.8\times10^5\pi\dfrac{x^2}{2}\Big|_3^{30}=1.4\times10^9$（J）.

【例 2】为消除井底的污泥，用缆绳将抓斗放入井底，抓起污泥后提出井口，已知井深 30m，抓斗自重 400N，缆绳每米重 50N，抓斗抓起污泥重 2000N，提升速度为 3m/s，在提升过程中污泥以 20N/s 的速度从抓斗缝隙中漏掉，现将抓起污泥的抓斗提升到井口，问克服重力需做多少焦耳的功.

解　做 x 轴如图 6.17 所示，将抓起污泥的抓斗提升至井口需做功$W=W_1+W_2+W_3$，其中W_1是克服抓斗自重所做的功，W_2是克服缆绳力所做的功，W_3是提出污泥所做的功.

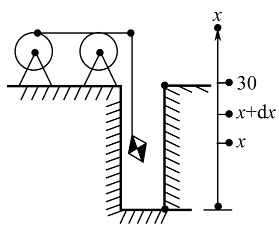

图 6.17

由题意知$W_1=400\times30=12000$（J）.

将抓斗由 x 处提升到$x+\mathrm{d}x$处，克服缆绳重力所做的功为

$$\mathrm{d}W_2=50(30-x)\mathrm{d}x$$

$$W_2=\int_0^{30}50(30-x)\mathrm{d}x=22500\text{（J）}$$

在时间间隔$[t,t+\mathrm{d}t]$内提升污泥所做的功为$\mathrm{d}W_3=3(2000-20t)\mathrm{d}t$.

将污泥从井底提升至井口共需时间$\dfrac{30}{3}=10$（s）.所以

$$W_3=\int_0^{10}3(2000-20t)\mathrm{d}t=57000\text{（J）}$$

因此，共做功$W=12000+22500+57000=91500$（J）.

【例 3】设有一薄板，其边缘为一抛物线，如图 6.18 所示垂直沉入水中，其顶点恰在水平面上，试求薄板所受的静压力.

解　抛物线方程为$x=\dfrac{5}{9}y^2$，则在水下 x 到$x+\mathrm{d}x$这一小块所受的

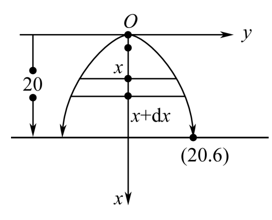

图 6.18

静压力为 $\mathrm{d}P = x \cdot 6\sqrt{\frac{x}{5}}\mathrm{d}x$，得

$$p = \int_0^{20} \frac{6}{\sqrt{5}} x^{\frac{3}{2}} \mathrm{d}x = 1920$$

【例 4】一质量为 M，长为 L 的均匀杆 AB 吸引着质量为 m 的一质点 C，此质点 C 位于 AB 杆的延长线上，并与较近的端点 B 的距离为 a（见图 6.19），试求杆与质点间的相互吸引力.

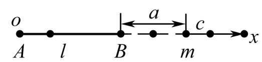

图 6.19

解　根据万有引力定律，由元素法得

$$\mathrm{d}F = \frac{km \cdot \frac{M}{L}\mathrm{d}x}{(L+a-x)^2} = \frac{kmM}{L} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{(L+a-x)^2}$$

$$F = \int_0^L \frac{kmM}{L} \cdot \frac{1}{(L+a-x)^2}\mathrm{d}x = \frac{kmM}{a(a+L)} \quad （k \text{ 为常数}）$$

测　试　题

1．物体做非匀速直线运动的速度为 $v(t) = 3t^2 + 1$，则物体从 t=0 时刻到 t=1 时刻所走路程 S.

2．求由 $y = x^2$、$y = \sqrt{x}$ 所围平面图形的面积 S，及由该图形绕 x 轴旋转一周所生成的旋转体的体积 V_x.

3．求由 $y = x^2$、$y = x$ 所围平面图形的面积 S，及由该图形绕 x 轴、y 轴旋转一周所生成的旋转体的体积 V_x、V_y.

4．求由曲线 $y = \frac{3}{x}$、$x+y=4$ 所围图形：

（1）面积；

（2）绕 x 轴旋转生成立体的体积.

5．求由 $y = x$、$y = -x^2$ 所围图形：

（1）面积 S；

（2）绕 x 轴旋转一周而成的立体体积 V_x；

（3）绕 y 轴旋转一周而成的立体体积 V_y.

6．求由 $y^2 = 2x$ 与直线 $y = x - 4$ 所围的图形：

（1）面积 S；

（2）绕 y 轴旋转一周而成的立体体积 V_y.

7．求由 $y = \frac{1}{x}$、$y = x$、$x = 2$ 及 x 轴围成的图形的面积，以及绕 x 轴旋转一周而成的立体体积 V_x.

8．计算阿基米德螺旋线 $p = 3\theta$ 上相当于 θ 从 0 到 2π 的一段弧与极轴所围成的图形的面积及从 0 到 2π 的一段弧长.

9．求 $\rho=2a\sin\theta$ 所围成的图形的面积.

10．用铁锤将一铁钉击入木板，设木板对铁钉的阻力与铁钉击入木板的深度成正比，在击第一次时，将铁钉击入木板 1cm，如果铁锤每次打击铁钉所做的功相等，问铁锤打击木板第二次时，铁钉又击入多少？

11．一正方形木板垂直放入水中，边长为 1m，木板上边刚好与水面平齐，求木板一侧所受到的压力（$\rho=10^3\,\text{kg/m}^3$，g=9.8m/s^2）.

12．有一梯形水闸门，上底 6m，下底 2m，高 10m，试求当水面与上底平齐时，闸门一侧所受的总压力.

13．设有一半径为 R，中心角为 φ 的圆弧形细棒，其线密度为常数 ρ，在圆心处有一质量为 m 的质点 M，试求这细棒对质点 M 的引力.